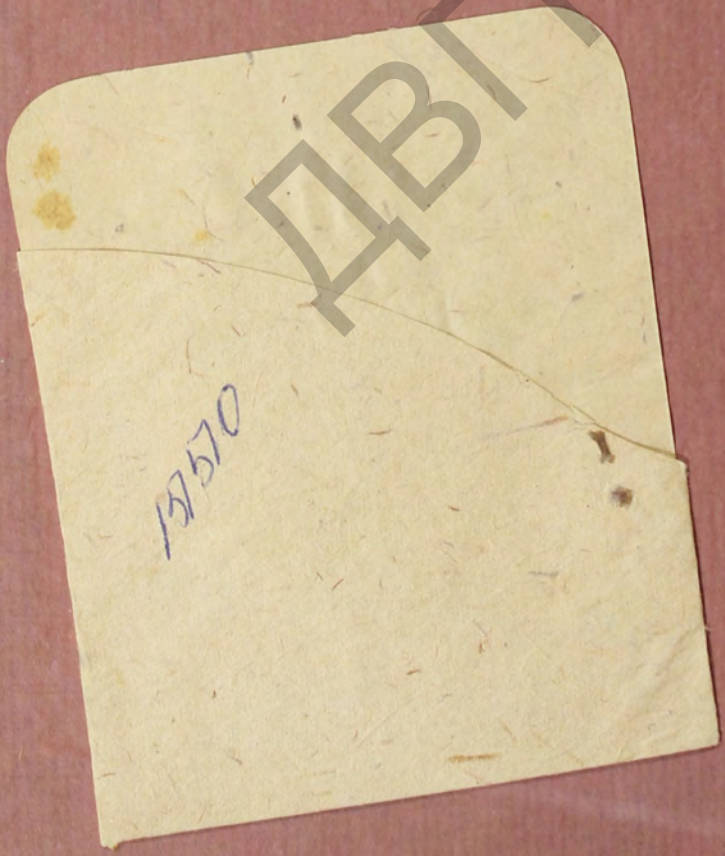
АВ 613
А-156

ЛВГНБ

ЭР01663


17570
ДВГНБ
ЭР01663

ДВГНБ

ЭР01663

ДВГНБ

ЭР01663

ДВ 613 (1)
5 (91) А-156

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
THE FAR EASTERN STATE UNIVERSITY

Проверено 19 52 г.
110/VII
137.510

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

ТОМ I

ОТВЕТСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР
ПРОФ. В. И. ТУРАНСКИЙ

SCIENTIFIC STUDIES

SECTION OF MATHEMATICAL AND PHYSICAL SCIENCES

VOLUME I

EDITED BY PROF. V. I. TURANSKY

ДВГНБ
...Б. КРАЕВАЯ
...ЧНАЯ БИБЛИОТЕКА

ВЛАДИВОСТОК
1937
VLADIVOSTOCK

ДВ
государственная
научная библиотека
ЭР01663

Проверено
1940 г.

ДВГНБ

Редкомиссия: *М. Н. Орлов, В. И. Туранский, С. П. Слугинов, В. С. Сорокин, К. Н. Шевченко.*

ЭР01663

ДВ ГОС. УНИВЕРСИТЕТ, УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ I, 1937
FAR EASTERN STATE UNIVERSITY, SCIENTIFIC STUDIES, VOL. I, 1937

Проф. В. И. Туранский.

СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ ПЛАСТИНОК, НАКЛАДНОЙ ШКАЛОЙ И БЛИНК-МИКРОСКОПОМ, НА ПРИМЕРЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРИВОЙ ЯРКОСТИ ЭРОСА (В ЛАБОР. ПРОФ. Г. А. ТИХОВА — ПУЛКОВСКАЯ ОБСЕРВАТОРИЯ).

COMPARATIVE RESULTS OF THE MEASUREMENTS OF PLATES — BY THE METHOD OF APPLICATION AND BY THE BLINK-MICROSCOPE.

By prof. V. I. Turansky.

I.

Мною измерена, полученная (25 декабря 1930 года) проф. Г. А. Тиховым по способу призматического спутника, пластинка № 3107, при пользовании шкалой № 807, по ее звезде $BD + 26°2359$.

Для калибровки шкалы выбранной звезды, т. е. значений одной ступени шкалы в звездных величинах, взяты были три звезды указанной пластинки за №№ 0, 3, 4 и измерены в ступенях шкалы вместе с их призматическими спутниками. В результате чего получены три значения $K = \frac{\Delta m}{A - a}$ (см. табл. 1), где A ступень шкалы для главной звезды, a — соответствующая ступень спутника, $\Delta m = 2{,}33$ (см. Г. А. Тихов, „Новые определения постоянной призматического спутника", *Изв. Научн. Ин-та им. Лесгафта П. Ф.*, т. VII, 1924 г. и „Метод призматического спутника в приложении к фотографической фотометрии звезд", *Изв. Научн. Ин-та им. Лесгафта П. Ф.*, 1923 г.).

Значения K для каждой звезды дали очень небольшой ход ($K_1 = 0{,}76$, $K_2 = 0{,}78$, $K_3 = 0{,}78$). Поэтому среднее значение $\frac{\Sigma K}{n}$ из всех „K" звезд мною было принято за среднее значение одной ступени шкалы, которое оказалось, как видно из табл. 1-й, равным 0,77.

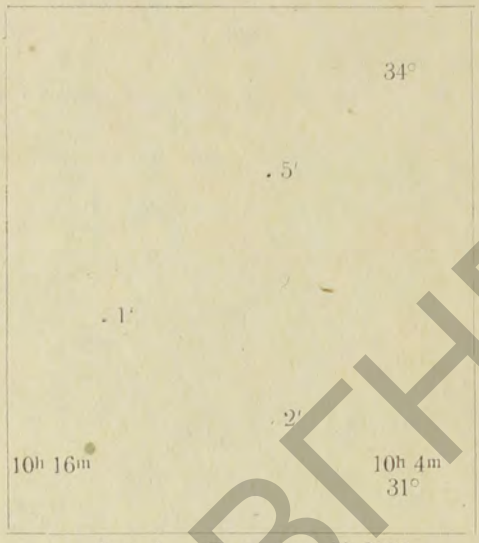
Далее были выбраны три звезды сравнения для Эроса на измеряемой пластинке за №№ 1′, 2′, 5′ (участок неба прилагается), которые

ЭР01663

были промерены в ступенях шкалы, равно как и сам Эрос при двух положениях пластинки на блинк-микроскопе (шкала слева и справа) и из соответствующих отсчетов взяты средние для каждой звезды (см. табл. 2-ю).

Выбранные звезды по Bon. Durchm. оказались: № 1′ *BD* + 32°2021, зв. вел. 8,6; № 2′ *BD* + 31° 2119, зв. вел. 7,4; № 5′ *BD* + 33°1964, зв. вел. 8,9.

Две из них, № 1′ и № 2′, по Copf'y значатся: первая под № 368, фотогр. вел. 9,83, Col. Ind. 1,03, спектр K_0, вторая № 353, фотогр. вел. 9,43, Col. Ind. 1,62, спектр M_a.



Фиг. 1. — Пластинка № 3107.

Результаты произведенных редукций прилагаются в таблице 3-й.

II.

Та же самая пластинка № 3107 измерена мною шкалой № 2920 по зв. *BD* 26°2343 способом „накладной шкалы". Для калибровки шкалы были выбраны те же звезды пластинки (№ 0, 3, 4). Результаты измерений в шкаловых единицах оказались (см. табл. 4) таковы, что значение одной ступени шкалы в звездных единицах, как среднее из трех *K*, получилось: $\frac{\Sigma k}{n} = 0{,}77$.

Далее были взяты те же звезды сравнения на пластинке (№№ 1′, 2′, 5′) и измерены в единицах шкалы (см. табл. 5).

Результаты произведенных редукций прилагаются в таблице 6-й.

Исправленные моменты фотографирования Эроса, с применением двукратно увеличивающейся экспозиции, были следующие:

1 —	5h	35m 4	8 —	6h	30m 4
2 —	5	41 9	9 —	6	36 9
3 —	5	48 4	10 —	6	43 4
4 —	5	54 9	11 —	6	59 9
5 —	6	1 4	12 —	7	6 4
6 —	6	17 4	13 —	7	12 9
7 —	6	23 9	14 —	7	19 4

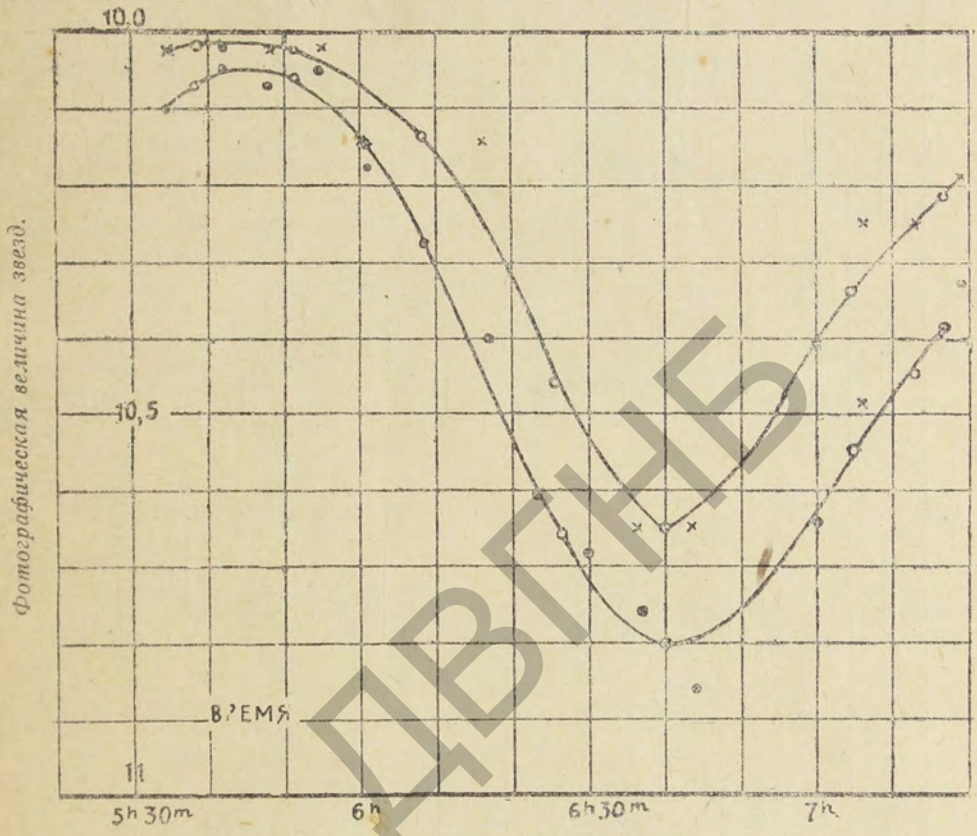
График изменения яркости Эроса, вычисленной по пластинке № 3107 на двух различных приборах (блинк-микроскоп и накладная шкала) и в различных шкалах (пл. № 807 и № 2920) по разным звездам, представляется на фиг. 2. (Для сглаживания кривых измерения соединены по два.)

Среднее расхождение в 0,14 фотографической величины изменения яркости Эроса можно объяснить отчасти различной оценкой в вели-

ЭР01663

ДВГНБ

чинах шкалы Эроса на блинк-микроскопе и накладной шкале (на первом оценка меньше), отчасти несовершенством второго прибора против первого, т. к. накладная шкала при работе с ней дает неполную параллельность плоскостей пластинок при прокладке их бумагой. По-



Фиг. 2. График изменения яркости Эроса.

следнее также сказывается в неплавности расположения точек кривой изменения яркости.

Примечание автора. Хотя одна ступень выбранных двух шкал и получилась большей, чем это имеет место (см. Г. А. Тихов „Определение цвета звезд и т. д.", стр. 8), однако, при имеющемся одинаковом значении ступени в обоих случаях для сравнения результатов измерений пластинок это не играет роли, т. к. разница полученных яркостей Эроса должна остаться в среднем той же, что и указана в работе.

ДВГНБ

ЭР01663

Таблица 1.

№№ изоб.	Звезда № 0		Звезда № 3		Звезда № 4	
	Гл. изоб.	Призм. изобр.	Гл. изоб.	Призм. изобр.	Гл. изоб.	Призм. изобр.
1	4,4	7,4	4,7	7,7	6,1	9,1
2	4,5	7,5	4,6	7,6	6,2	9,2
3	4,6	7,6	4,7	7,7	6,3	9,3
4	4,7	7,7	4,7	7,7	6,4	9,4
5	4,8	7,8	4,8	7,8	6,5	9,5
6	4,9	7,9	4,9	7,9	6,6	9,6
7	5,0	8,0	5,0	8,0		
8	5,1	8,1	4,9	7,9		
9	4,8	7,8	4,8	7,8		
10	4,7	7,7	5,0	8,0		
11	5,0	8,2	4,7	7,7		
12	4,6	8,6	4,8	7,8		
13	4,7	7,7	4,9	7,9		
14	4,8	7,8	5,0	8,0		
Ср. . . .	4,76	7,84	4,82	7,82	6,3	9,3

$K_1 = 0{,}76$ $K_2 = 0{,}78$ $K_3 = 0{,}78$

$$K = \frac{\Sigma k}{n} = 0{,}77$$

ДВГНБ

ЭР01663

Таблица 2.

№№ изобр.	Эрос				Звезда ср. № 1				Звезда ср. № 2				Звезда ср. № 5			
	I	II	I–II	$\frac{I+II}{2}$	I	II	I–II	$\frac{I+II}{2}$	I	II	I–II	$\frac{I+II}{2}$	I	II	I–II	$\frac{I+II}{2}$
1	6,3	6,2	0,1	6,25	6,0	5,8	0,2	5,90	5,6	5,5	0,1	5,55	5,8	5,7	0,1	5,75
2	6,4	6,2	0,2	6,3	6,1	5,9	0,2	6,00	5,7	5,6	0,1	5,65	5,9	5,7	0,2	5,80
3	6,5	6,3	0,2	6,4	6,2	6,1	0,1	6,15	5,8	5,5	0,3	5,65	6,0	5,9	0,1	5,95
4	6,6	6,4	0,2	6,5	6,3	6,2	0,1	6,25	5,9	5,7	0,2	5,8	6,1	5,9	0,2	6,00
5	6,7	6,5	0,2	6,6	6,4	6,3	0,1	6,35	5,7	5,5	0,2	5,6	6,2	6,1	0,1	6,15
6	7,0	7,0	0	7,0	6,5	6,4	0,1	6,45	5,8	5,6	0,2	5,7	6,2	6,1	0,1	6,15
7	7,4	7,3	0,1	7,35	6,5	6,5	0	6,50	5,9	5,8	0,1	5,85	6,3	6,3	0	6,30
8	7,6	7,5	0,1	7,55	6,6	6,5	0,1	6,55	6,0	5,9	0,1	5,95	6,4	6,4	0	6,40
9	7,9	7,6	0,3	7,75	6,7	6,6	0,1	6,65	6,1	6,0	0,1	6,05	6,5	6,4	0,1	6,45
10	8,0	7,8	0,2	7,9	6,8	6,7	0,1	6,75	6,2	5,8	0,4	6,0	6,6	6,5	0,1	6,55
11	7,6	7,5	0,1	7,55	6,5	6,4	0,1	6,45	6,3	6,0	0,3	6,15	6,7	6,7	0	6,70
12	7,5	7,3	0,2	7,4	6,8	6,5	0,3	6,65	6,2	5,9	0,3	6,05	6,8	6,7	0,1	6,75
13	7,4	7,2	0,2	7,3	6,7	6,6	0,1	6,65	6,1	5,8	0,3	5,95	6,9	6,8	0,1	6,85
14	7,3	7,0	0,3	7,15	6,8	6,7	0,1	6,75	5,9	5,8	0,1	5,85	7,0	6,9	0,1	6,95

ДВГНБ

ЭР01663

РЕДУКЦИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЯРКОСТИ ЭРОСА (БЛИНК-

№№ изображ.	I Эрос	II № 1	III № 2	IV № 5	V 1—Эр.	VI 2—Эр.	VII К(1—Эр.)	VIII К(2—Эр.)	IX 9,83 — К(—Эр.)
1	6,25	5,9	5,55	5,75	—0,35	—0,70	—0,27	—0,54	10,10
2	6,3	6,0	5,65	5,8	—0,30	—0,65	—0,23	—0,50	10,06
3	6,4	6,15	5,65	5,95	—0,25	—0,75	—0,19	—0,58	10,02
4	6,5	6,25	5,8	6,0	—0,25	—0,70	—0,19	—0,54	10,02
5	6,6	6,35	5,6	6,15	—0,25	—1,00	—0,19	—0,77	10,02
6	7,0	6,45	5,7	6,15	—0,55	—1,30	—0,42	—1,00	10,25
7	7,35	6,50	5,85	6,30	—0,85	—1,50	—0,65	—1,15	10,48
8	7,55	6,55	5,95	6,40	—1,00	—1,60	—0,77	—1,23	10,60
9	7,75	6,65	6,05	6,45	—1,10	—1,70	—0,85	—1,31	10,68
10	7,9	6,75	6,0	6,55	—1,15	—1,90	—0,89	—1,46	10,72
11	7,55	6,45	6,15	6,70	—1,10	—1,40	—0,85	—1,08	10,68
12	7,40	6,65	6,05	6,75	—0,75	—1,35	—0,58	—1,04	10,41
13	7,3	6,65	5,95	6,85	—0,65	—1,35	—0,50	—1,04	10,33
14	7,15	6,75	5,85	6,95	—0,40	—1,30	—0,29	—1,00	10,12

ЭР01663

ДВГНБ

Таблица 3.

МИКРОСКОПОМ) НА ПЛАСТИНКЕ № 3107, ШКАЛЕ № 807.

X 9,43 —K(2—Эр.)	XI $\frac{II+III}{2}$	XII XI—IV	XIII XI—I	XIV XIII+XII ср.	XV К. XIV	XVI 9,63—XV	XVII $\frac{IX+X+XI}{3}$	1—2	К (1—2)
9,97	5,72	—0,03	—0,53	—0,74	—0,57	10,20	10,09	0,35	0,3
9,93	5,82	—0,02	—0,48	—0,69	—0,53	10,16	10,05	0,35	0,3
10,01	5,90	—0,05	—0,50	—0,71	—0,55	10,18	10,07	0,50	0,385
9,97	6,02	+0,02	—0,48	—0,69	—0,53	10,16	10,05	0,45	0,346
10,20	5,97	—0,18	—0,63	—0,84	—0,65	10,28	10,17	0,75	0,577
10,43	6,07	—0,08	—0,93	—1,14	—0,88	10,51	10,40	0,75	0,577
10,58	6,17	—0,13	—1,18	—1,39	—1,07	10,70	10,59	0,65	0,50
10,66	6,25	—0,15	—1,30	—1,51	—1,16	10,79	10,68	0,60	0,452
10,74	6,35	—0,10	—1,40	—1,61	—1,24	10,87	10,76	0,60	0,452
10,89	6,35	—0,20	—1,55	—1,76	—1,35	10,98	10,86	0,75	0,577
10,51	6,30	—0,40	—1,25	—1,46	—1,12	10,75	10,64	0,30	0,23
10,67	6,35	—0,45	—1,05	—1,26	—0,97	10,60	10,49	0,60	0,452
10,47	6,30	—0,55	—1,00	—1,21	—0,93	10,56	10,45	0,70	0,54
10,43	6,30	—0,65	—0,85	—1,06	—0,81	10,44	10,33	0,90	0,693
	Ср.	—0,21						0,59	0,456

ДВГНБ

ЭР01663

Таблица 4.

№№ изобр.	Звезда № 0		Звезда № 3		Звезда № 4	
	Гл. изобр.	Призм. изобр.	Гл. изобр.	Призм. изобр.	Гл. изобр.	Призм. изобр.
1	1,0	4	1,2	4,2	2,5	5,5
2	1,1	4,1	1,1	4,1	2,6	5,6
3	1,2	4,2	1,2	4,2	2,7	5,7
4	1,3	4,3	1,2	4,2	2,8	5,8
5	1,4	4,4	1,3	4,3	2,9	5,9
6	1,5	4,5	1,4	4,4	3,0	6,0
7	1,6	4,6	1,5	4,5		
8	1,7	4,7	1,4	4,4		
9	1,4	4,4	1,3	4,3		
10	1,3	4,3	1,5	4,5		
11	1,6	4,6	1,2	4,2		
12	1,2	4,4	1,3	4,3		
13	1,3	4,3	1,4	4,4		
14	1,4	4,4	1,5	4,5		
Ср. . . .	1,36	4,37	1,32	4,32	2,75	5,75

$K_1 = 0{,}77$ $K_2 = 0{,}78$ $K_3 = 0{,}77$

$$K = \frac{\Sigma k}{n} = 0{,}77$$

ДВГНБ

ЭР01663

Таблица 5.

№№ изобр.	Эрос	Зв. ср. № 1	Зв. ср. № 2	Зв. ср. № 5
1	3	2,7	2,4	2,7
2	3,1	2,8	2,5	2,8
3	3,2	2,9	2,6	2,9
4	3,3	3,0	2,7	3,0
5	3,4	3,1	2,5	3,1
6	3,5	3,2	2,6	3,0
7	3,9	3,2	2,7	3,1
8	4,1	3,3	2,8	3,2
9	4,4	3,4	2,9	3,3
10	4,5	3,5	3,0	3,4
11	4,1	3,2	3,1	3,3
12	4,0	3,5	3,0	3,4
13	3,9	3,4	2,9	3,4
14	3,8	3,5	2,7	3,5
Ср. . . .	3,4	3,2	2,7	3,1

ДВГНБ

ЭР01663

РЕДУКЦИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЯРКОСТИ ЭРОСА (НАКЛАДНОЙ

№№ изобр.	I Эрос	II № 1	III № 2	IV № 5	V 1—Эр.	VI 2—Эр.	VII K(1—Эр.)	VIII K(1—Эр.)	IX —K(1—Эр.)
1	3,0	2,7	2,4	2,7	—0,3	—0,6	—0,23	—0,46	10,06
2	3,1	2,8	2,5	2,8	—0,3	—0,6	—0,23	—0,46	10,06
3	3,2	2,9	2,6	2,9	—0,3	—0,6	—0,23	—0,46	10,06
4	3,3	3,0	2,7	3,0	—0,3	—0,6	—0,23	—0,46	10,06
5	3,4	3,1	2,5	3,1	—0,3	—0,9	—0,23	—0,70	10,06
6	3,5	3,2	2,6	3,0	—0,3	—0,9	—0,23	—0,70	10,06
7	3,9	3,2	2,7	3,1	—0,7	—1,2	—0,54	—0,92	10,37
8	4,1	3,3	2,8	3,2	—0,8	—1,3	—0,62	—1,00	10,45
9	4,4	3,4	2,9	3,3	—1,0	—1,5	—0,77	—1,15	10,60
10	4,5	3,5	3,0	3,4	—1,0	—1,5	—0,77	—1,15	10,60
11	4,1	3,2	3,1	3,3	—0,9	—1,0	—0,70	—0,77	10,53
12	4,0	3,5	3,0	3,4	—0,5	—1,0	—0,38	—0,77	10,21
13	3,9	3,4	2,9	3,4	—0,5	—1,0	—0,38	—0,77	10,21
14	3,8	3,5	2,7	3,5	—0,3	—1,1	—0,23	—0,84	10,06

ДВГНБ

ЭР01663

Таблица 6.

ШКАЛОЙ) НА ПЛАСТИНКЕ № 3107, ШКАЛЕ № 2920, ПО ЗВ. *BD* 26°2343

X — K(2—Эр.)	XI (II+III)/2	XII XI—IV	XIII XI—I	XIV XIII+XII ср.	XV K XIV	XVI 9,63—XV	XVII (IX+X+XVI)/3	1—2	K(1—2)
9,89	2,55	—0,15	—0,45	—0,63	—0,49	10,12	10,02	0,3	0,23
9,89	2,65	—0,15	—0,45	—0,63	—0,49	10,12	10,02	0,3	0,23
9,89	2,75	—0,15	—0,45	—0,63	—0,49	10,12	10,02	0,3	0,23
9,89	2,85	—0,15	—0,45	—0,63	—0,49	10,12	10,02	0,3	0,23
10,13	2,8	—0,3	—0,6	—0,78	—0,61	10,24	10,14	0,6	0,46
10,13	2,9	—0,1	—0,6	—0,78	—0,61	10,24	10,14	0,6	0,46
10,35	2,95	—0,15	—0,95	—1,13	—0,88	10,51	10,41	0,6	0,39
10,43	3,05	—0,15	—1,05	—1,23	—0,95	10,58	10,48	0,5	0,39
10,58	3,15	—0,15	—1,25	—1,43	—1,11	10,78	10,64	0,5	0,39
10,58	3,25	—0,15	—1,25	—1,43	—1,11	10,74	10,64	0,5	0,39
10,20	3,15	—0,15	—0,95	—1,13	—0,88	10,51	10,41	0,1	0,08
10,20	3,25	—0,15	—0,75	—0,93	—0,72	10,35	10,25	0,5	0,39
10,20	3,15	—0,25	—0,75	—0,93	—0,72	10,35	10,25	0,5	0,39
10,27	3,20	—0,30	—0,60	—0,78	—0,61	10,24	10,19	0,8	0,62
	Ср.	—0,18						0,5	0,35

ДВГНБ

ЭР01663

ДВГНБ

ЭР01663

Проф. В. И. Туранский.

КАТАЛОГ ЗВЕЗД ОБЛАСТИ ✳ *BD* + 51°3091 CYGNI

CATALOGUE OF STARS OF THE REGION ✳ *BD* +51°3091 CYGNI

By prof. V. I. Turansky.

49°50′

№№ п/п.	№№ B. D.	D	A	Фотовиз.	Фотогр.	Фиолет.	Фотовиз. С. I.	Фиол.-виз. С. I.	Спектры
1		9,3	21 31 23	11,67	11,90		0,32		
2		9,9	51	12,46	12,26		0,11		
3		4,7	32 26	10,81	11,37		0,65		
4		7,3	29	10,12	10,63		0,60		G_0
5		7,1	33	—	12,39				
6		6,0	39	—	12,28				
7		9,5	43	11,05	11,70		0,74		
8		7,0	45		12,73				
9		7,3	46		12,73				
10		7,5	47		12,39				
11		8,0	51	11,67	11,90		0,32		
12		9,7	33 4		13,61				
13		9,0	21		13,61				
14		8,7	28		13,61				
15		7,3	31		13,12				
16		8,0	34		13,61				
17		7,7	39	10,91	11,52		0,70		G_0
18		7,0	47	12,23	12,21		0,07		
19		9,7	56	10,65	10,35	10,29	0,21	−0,36	B_0
20		8,3	34 4		13,53				

ЭР01663

№№ п/п	№№ B. D.	D	A	Фотовиз.	Фотогр.	Фиолэт.	Фотовиз С. I.	Фиол.-виз. С. I.	Спектры
21		7,0	18	12,07	13,43		0,45		
22		9,0	20	12,65	13,13		0,57		
23		3,7	24	12,65	12,75		0,19		
24		7,3	26		13,63				
25		8,7	44		13,63				
26		8,0	53		13,63				
27		8,8	35 14	11,84	12,41		0,66		G_0
					50°00′				
28		6,3	28 14	11,84	12,74		0,99		
29		10,0	16	11,67	13,10		1,52		
30		7,3	34	12,55	13,11		0,65		
31		4,3	44		13,61				
32		7,0	55	10,70	12,05		1,44		
33		3,3	29 16	10,84	10,99		0,24		
34		0,3	22	12,00	12,39		0,48		
35		1,8	22		13,61				
36		5,8	23	10,59	12,26		1,75		
37		8,0	24	11,83	12,52		0,78		
38		2,0	26		13,11				
39		9,2	31		12,57				
40		4,5	36	11,67	12,26		0,68		
41		6,7	40	10,90	10,62	10,38	—0,19	—0,52	
42		7,3	41		13,09				
43		4,1	53		13,60				
44		5,3	30 1	12,63	12,71		0,01		
45		7,3	3	12,63	12,71		0,01		
46		1,3	4		12,72				
47		4,0	4		13,60				
48		2,5	6		13,60				
49		2,0	8		13,60				
50		3,1	13		13,59				
51		8,3	24	10,87	12,36		1,58		
52		3,9	26	9,96	9,79		—0,08		
53		6,1	28		12,56				
54		8,7	34		13,58				
55		7,8	41	12,70	12,35		—0,26		
56		1,9	47	11,42	12,71		1,36		
57		6,7	31 2	11,02	12,70		1,77		
58		4,1	20	11,04	11,33	11,42	0,38	0,38	
59		3,9	37	11,90	12,03		0,22		
60		5,1	43		13,09				
61		1,1	47		13,60				
62		0,3	59		13,60				
63		3,3	32 4	11,58	11,68		0,21		
64		0,1	28	11,83	12,38		0,64		
65		0,0	29	11,83	12,38		0,64		
66		5,1	30		13,58				
67		8,3	36	9,46	9,36		—0,01		A_0
68		5,3	33 2	12,19	12,70		0,60		
69		5,3	3		13,28				
70		7,3	4	10,59	11,15		0,65		

РВГБ

ЭР01663

№№ п/п.	№№ B. D.	D	A	Фотовиз.	Фотогр.	Фиолет.	Фотовиз. С. I.	Фиол.-виз. С. I.	Спектры
71		5,0	6	11,40	11,68		0,37		
72		8,7	9	11,80	12,01		0,30		
73		9,8	10	12,61	12,69		0,17		
74		8,4	16		13,57				
75		2,0	28	11,42	11,69		0,36		
76		3,7	30		13,58				
77		7,3	34	11,19	11,69	11,78	0,59	0,59	
78		2,0	36		13,59				
79		2,7	37		13,59				
80		3,3	40		13,59				
81		8,3	41	9,53	9,36		−0,08		B_8
82		8,7	43		12,92				
83		5,3	45		12,85				
84		3,8	46	10,53	11,70		0,26		
85		6,0	51		13,50				
86		9,0	56	11,72	13,58		1,91		
87		2,0	34 8	9,64	9,49		−0,06		A_0
88		1,6	21	11,84	11,71		−0,04		
89		1,5	21	12,23	12,73		0,59		
90		8,7	22	12,19	13,08		0,98		
91		7,5	24	13,58	13,60		0,11		
92		7,3	25	12,19	12,36		0,26		
93		1,3	27		13,11				
94		0,0	34	12,47	12,73		0,35		
95		0,8	35		13,61				
96		6,0	38	12,07	11,71	11,47	−0,27	−0,60	
97		0,3	42	12,65	13,11		0,55		
98		7,3	47	11,50	12,37		0,96		
99		7,5	49	12,21	13,09		0,97		
100		4,7	35 9	12,65	12,95		0,39		
101		2,0	10		13,12				
102		7,3	15	11,83	11,78		0,04		
103		8,0	15	12,82	13,10		0,37		
104		4,0	20		13,11				
105		4,7	21	12,65	12,39		−0,17		
106		1,0	22	11,20	12,38		1,27		
107		7,3	23	12,64	12,72		0,17		
108		7,5	24	12,64	13,60		1,05		
109		1,0	25	12,06	12,58		0,61		
110		4,7	26	11,60	11,71		0,20		
111		9,7	27	10,69	12,58		1,98		
112		9,8	28	12,22	13,60		1,47		
113		5,3	32	9,10	9,11		0,10		A_0
114		2,7	36	10,98	11,36		0,47		
115		7,7	37	11,35	12,38		1,12		
116		0,3	37		13,62				
117		0,1	38	11,84	11,83		0,08		
118		6,3	40	12,23	12,19		0,05		
119		4,7	52	12,65	13,62		1,06		
120		4,3	59	10,91	10,64	10,57	−0,18	−0,34	A_0
121		7,3	36 2	11,83	12,05		0,31		
122		3,1	4	11,83	12,39		0,65		
123		8,0	8	12,61	13,60		1,05		
124		7,3	17	11,51			0,16		

ДВГНБ

Д. В. КРАЕВАЯ

ЭР01663

№№ п/п.	№№ B. D.	D	A	Фотовиз.	Фотогр.	Фиолет.	Фотовиз. С. I.	Фиол.-виз. С. I.	Спектры
125		6,1	21	11,84	12,59		0,84		
126		8,1	26	11,83	13,60		1,86		
127		4,7	30	11,84	11,91		0,16		
128		4,8	34	12,23	12,73		0,59		
129		8,8	38		13,61				
130		9,0	41		13,61				
131		6,3	42		13,11				
132		7,0	47	11,84	13,11		1,36		
133		5,9	51						
134		9,3	37 6		13,12				
135		7,9	10	11,85	12,29		0,53		
136		8,3	11	11,45	11,85		0,49		
137		8,9	21	10,13	10,03		—0,01		
138		19,9	25 54	12,66	12,75		0,00		
139		18,0	58	10,58	10,65		—0,11		B_2
140		17,8	26 2	11,85	12,07		0,31		
141	49°3530	17,0	8	8,50	8,48		0,07		A_0
142		16,0	27 45		13,08				
143		19,1	50	11,20	12,38		1,27		
144		17,3	28 2	12,19	13,58		1,47		
145		12,7	3	11,02	11,32		0,39		
146		17,0	8		13,57				
147		19,5	12	11,80	12,35		0,64		
148		16,0	20	10,80	10,59	10,40	—0,12	—0,40	A_0
149		13,5	35	11,80	12,69		0,98		
150		12,7	37	11,80	12,83		1,12		
151		10,3	41		13,08				
152		11,3	46	12,03	12,84		0,90		
153		17,3	52	12,17	12,67		0,59		
154		18,0	58	9,60	9,61		0,10		A_0
155		10,3	29 4	12,61	12,36		0,34		
156		12,5	5	10,66	11,02		0,45		
157		15,3	14	11,62	13,05		1,52		
158		12,3	15	12,19	12,01		—0,09		
159		11,0	19	9,46	9,65		0,28		A_2
160		14,0	32	11,71	11,86		0,24		
161		12,3	39	9,26	9,34		0,17		A_0
162		11,3	46	12,61	13,07		0,55		
163	49°3548	9,0	53	8,70	8,63		0,02		F_0
164		14,0	55		12,68				
165		18,1	30 4		13,07				
166		18,9	5		13,37				
167		12,3	15		13,08				
168		18,7	39	12,16	13,04		0,97		
169		15,6	45	10,63	10,56	10,21	0,02	—0,42	B_9
170		15,3	59	12,41	13,05		0,73		
171		13,3	31 4	10,85	12,67		1,91		
172		11,3	11	11,94	12,75		0,90		

ЭР01663

№№ п/п.	№№ B. D.	D	A	Фотовиз.	Фотогр.	Фиолет.	Фотовиз. С. I.	Фиол.-виз. С. I.	Спектры
173		17,7	18	11,61	12,88		1,36		
174		16,3	32	10,63	11,98		1,44		
175		14,1	32	10,26	11,28		1,11		
176		13,3	47	12,58	13,04		0,55		
177		12,3	49	9,36	9,95		0,68		G_5
178		19,3	32 21		12,87				
179		10,3	22		13,55				
180		16,3	23	11,38	11,65	11,69	0,36	0,31	
181		19,7	25		13,53				
182		10,1	26		13,55				
183		12,0	33	11,38	11,85		0,56		
184		15,8	35	12,58	12,66		0,17		
185		12,1	40	11,94	11,85		0,00		
186		15,3	47		13,54				
187		18,5	56		13,54				
188		19,3	33 8		12,31				
189		14,7	10	11,72	11,64	11,60	0,01	−0,12	
190		13,0	10	12,59	13,55		1,05		
191		19,8	13		13,53				
192		13,5	21		13,55				
193		12,7	33	10,64	12,33		1,78		
194		18,0	35	11,13	11,27	11,40	0,23	0,27	
195		13,3	37	12,59	13,05		0,55		
196		11,5	37	11,23	13,33		1,19		
197		10,6	44		13,55				
198	49°3562	12,6	51	7,02	6,97		0,04		B_9
199		20,0	52	11,99	12,79		0,89		
200		15,3	56		13,55				
201		15,3	58		13,05				
202		10,7	34 1	9,73	9,96		0,32		A_0
203		16,1	1	11,77	12,66		0,98		
204		14,3	4		13,55				
205		17,3	7		13,54				
206		18,7	8		13,54				
207		15,6	15		13,55				
208		16,5	21	11,62	11,99		0,46		
209		16,3	29	10,64	10,57	10,29	0,02	0,35	A_0
210		14,5	29		13,05				
211		18,9	31		13,54				
212		14,7	42	8,22	7,81		−0,32		A_0
213		12,2	43	10,29	10,47	10,54	0,27	0,25	
214		15,1	44	9,14	11,47		2,42		
215		13,0	48	9,60	11,31		1,80		
216		13,3	48	12,79	13,57		0,87		
217		12,3	50	11,80	13,07		1,36		
218		12,7	51		13,07				
219		12,2	52		12,35				
220		12,3	58		13,57				
221		18,3	59		13,55				
222		14,5	35 5		13,57				
223		17,1	7	11,00	11,99		1,08		
224		19,2	8		13,01				

РВГБ

ЭР01663

№№ п/п.	№№ B. D.	D	A	Фотовиз.	Фотогр.	Фиолет.	Фотовиз. С. I.	Фиол.-виз. С. I.	Спектры
225		19,8	12	11,77	12,88		1,20		
226		15,6	13		12,68				
227		11,3	13		13,54				
228		13,6	18	11,63	12,34		0,80		
229		16,7	21	11,38	11,51	11,60	0,22	0,22	
230		19,0	21	11,53	11,64	11,77	0,20	0,24	
231		15,0	31	10,41	11,52		1,20		
232		17,9	32		13,55				
233		19,8	33	12,59	12,67		0,17		
234		17,3	41	11,00	12,83		1,42		
235		16,7	41	9,93	10,28	10,38	0,44	0,45	F_2
236		19,7	44	8,97	9,05		0,17		A_3
237		10,0	51	11,40	12,01		0,70		
238		18,0	51	11,55	12,68		1,22		
239		17,1	53	11,79	12,34		0,64		
240		18,0	53		13,56				
241		16,7	54		12,90				
242		10,8	55		13,57				
243		10,8	58		13,07				
244		15,5	36 2		13,57				
245		17,3	8	11,40	11,31	11,30	0,00	—0,10	B_8
246		12,7	13	9,14	9,36		0,31		A_3
247		16,0	15	12,61	13,07		0,55		
248		17,2	16	9,60	10,95	11,40	1,44	1,80	
249		11,3	30		13,09				
250		19,7	37		13,57				
251		17,7	50		13,08				
252		14,7	44		13,59				
253		10,2	55		11,35				
254		16,3	57		13,09				
255		10,3	59		11,91				
256		14,5	37 0	10,31	12,03		1,81		
257		15,5	3	10,31	10,31	10,38	0,09	0,07	A_0
258		11,1	12	10,70	11,05		0,44		
259		10,8	13	12,65	12,39		—0,17		
260		15,9	13		13,11				
261		17,3	14		13,11				
262		18,7	15	9,98	11,05	11,65	1,16	1,67	
263		17,3	19		13,61				
264		14,0	22		13,61				
265		12,1	30	11,29	12,39		1,19		
266		13,7	34		13,61				
267		11,3	45		13,11				
268		14,3	56	9,64	10,15	10,38	0,60	0,74	F_8
269		16,0	38 3	11,84	13,12		1,37		
270		18,3	9	10,46	11,71		1,24		
271		16,1	14		12,88				
272		26,0	24 52	11,68	11,73		0,14		
273		26,7	25 50	10,33	10,32	10,15	0,08	—0,18	A_5

ИВГБ

ЭР01663

№№ п/п.	№№ B. D.	D	A	Фотовиз.	Фотогр.	Фиолет.	Фотовиз. С. I.	Фиол.-виз. С. I.	Спектры
274		24,3	26 16	11,96	12,36		0,49		
275		28,7	24	10,87	11,92		1,14		
276		23,5	33		13,58				
277		20,0	55	11,64	11,32	11,00	−0,23	−0,64	
278		21,1	27 4	12,17	12,33		0,25		
279		26,7	11	10,64	12,33		1,78		
280		25,0	21	11,78	11,99		0,31		
281		29,1	28 1		13,54				
282		20,3	6	9,14	9,95		0,60		F_8
283		22,3	6	11,62	11,55	11,20	0,00	−0,32	
284		24,1	21	11,77	11,98	12,04	0,31	0,27	
285		20,5	50	12,00	12,66		0,75		
286		27,7	51	11,76	13,53		1,86		
287		20,9	29 4	12,57	13,04		0,56		
288		22,0	8		13,54				
289		28,8	8	10,11	11,97		1,95		
290		22,1	16	12,58	13,04		0,55		
291		27,4	41		13,52				
292		21,1	30 7	12,57	13,01		0,53		
293		21,3	14	12,31	13,01		0,79		
294		24,3	54		13,01				
295		26,3	55	12,56	12,29		−0,18		B_0
296		29,2	55	11,59	11,59	11,45	0,09	−0,14	A_0
297		22,7	55		13,51				
298		24,0	31 00		13,01				
299		22,7	9	12,56	12,63		0,16		
300		20,2	25		13,52				
301		26,0	27	12,56	12,56	12,28	0,09	−0,28	A_0
302		27,6	39	8,18	8,56		0,47		B_5
303		25,3	44	11,91	12,29	12,40	0,47	0,49	
304		20,5	58	12,31	11,83		−0,39		
305		29,7	58	12,13	12,62		0,58		
306		27,6	58		13,00				
307		23,3	32 2	9,90	9,93		0,12		A_0
308		29,3	6		13,50				
309		24,7	15	11,76	13,03		1,36		
310		22,9	16		13,53				
311		26,0	21	11,97	11,94	11,70	0,06	−0,27	B_9
312		22,7	21		13,51				
313		25,3	29	12,38	12,43	12,54	0,14	0,16	
314		27,7	32		12,62				
315		24,7	32	11,75	13,00		1,34		
316		24,4	33	11,35	11,95		0,69		
317		25,9	34	12,38	12,63	13,00	0,34	0,62	
318		27,8	35		12,62				
319		24,7	42	12,14	13,01		0,96		
320		22,1	49	12,56	13,02		0,55		
321		24,7	54	10,97	11,61		0,73		
322		21,7	55	12,56	12,30	12,21	0,17	−0,35	
323		20,3	56		13,52				
324		28,7	59	11,74	11,94	12,00	0,20	0,26	

ЛВГНБ

ЭР01663

№№ п/п.	№ № B. D.	D	A	Фотовиз.	Фотогр.	Фиолет.	Фотовиз. С. I.	Фиол.-виз. С. I.	Спектры
325		20,7	33 0	11,98	11,96		0,07		A_0
326		21,0	0		13,53				
327		20,3	0		13,53				
328		28,0	13	11,12	12,49		1,46		
329		28,0	18	10,62	10,55	10,27	0,02	—0,35	B_9
330		29,3	33	8,58	8,38		—0,11		B_2
331		24,7	33		13,51				
332		25,3	36		13,01				
333		22,7	36	12,56	13,52		1,05		
334		20,3	40		13,01				
335		24,8	50		13,51				
336	50°3377	23,3	56	7,21	6,78		—0,34		B_9
337		25,2	58		13,51				
338		21,7	34 0	10,97	12,86		1,98		
339		28,7	2		12,63				
340		21,2	5	10,62	10,91		0,38		F_0
341		24,4	5		13,01				
342		24,2	10	12,38	11,95	11,76	—0,34	—0,62	
343		24,5	17	11,41	11,25		—0,07		
344		29,1	18	12,55	12,28		—0,18		
345		26,7	21		13,50				
346		24,1	23	12,56	12,29	12,12	—0,18	—0,44	
347		25,1	24	11,27	12,29		1,11		
348		29,0	28	12,56	12,28		—0,19		
349		20,9	31	12,56	12,63		0,16		
350		20,8	32	10,62	12,31		1,78		
351		25,1	32		13,51				
352		27,0	34	11,75	11,25		—0,41		
353		28,1	37		13,50				
354		26,7	41	12,56	12,63		0,16		
355		28,0	45	11,74	12,28		0,63		
356		20,2	46		11,97				
357		25,7	46	11,91	11,61	11,57	—0,21	—0,51	
358		29,5	47	11,74	11,60		—0,05		
359		26,5	48	11,59	13,01		1,51		
360		21,3	50		13,54				
361		22,0	51		13,54				
362		21,2	51	11,61	13,54		2,02		
363		20,3	52	12,58	13,54		1,05		
364		22,1	54		13,54				
365		21,3	55		13,54				
366		21,0	35 0	10,84	11,28	11,36	0,53	0,52	
367		26,1	4		13,51				
368		28,3	8		13,01				
369		29,1	12		13,01				
370		29,6	16		13,01				
371		27,3	17		12,85				
372		29,9	32		12,63				
373		28,8	32	10,24	11,61	12,40	1,46	2,16	
374		23,2	34	9,71	10,12		0,50		F_5
375		20,9	44		12,66				
376		23,3	45		13,54				
377		24,3	50		13,54				
378		26,5	54		13,54				

ЛВГБ

ЭР01663

№№ п/п.	№№ B. D.	D	A	Фотовиз.	Фотогр.	Фиолет.	Фотовиз. С. I	Фиол.-виз. С. I.	Спектры
379			36 0	12,16	12,32	12,44	0,25	0,28	
380		29,7	2	11,76	11,63	11,59	−0,04	0,17	
381		25,3	14		13,55				
382		21,3	14		13,04				
383		27,5	16		13,34				
384		26,0	17		13,04				
385		27,7	19		13,55				
386		22,0	23	10,99	11,28	11,61	0,38	0,62	F_0
387		25,8	26		13,05				
388		20,9	26		13,55				
389		22,7	28		12,80				
390		26,3	29		13,55				
391		20,2	32		12,80				
392		27,7	36	11,01	11,14	11,48	0,22	0,47	A_0
393		23,3	42		12,67				
394		26,2	58	12,16	12,32		0,25		
		29,3							
395			37 0	11,79	11,46		−0,24		
396		23,5	2	11,17	10,83	10,64	−0,25	−0,53	
397		20,0	5		13,57				
398		22,1	14		13,57				
399		21,3	17	10,66	10,59		0,02		A_2
400		20,0	18	12,29	11,68		0,42		
401		20,2	21	10,66	10,59		0,02		B_8
402		22,5	27	10,15	11,32	11,67	1,26	7,52	
403		22,4	36	11,80	11,32		−0,39		
404		22,3	36		13,06				
405		26,7	55	12,64	12,72		0,17		
		22,1							
406			38 1		12,72				
407		20,7	9	12,60	12,34	12,29	−0,17	−0,31	
408		28,0	35		13,09				
409		21,1	53		13,11				
410		22,0	58		13,61				
		25,8							
411		23,2	39 5	9,78	11,71		2,02		
412		25,3	6	12,47	12,73	12,96	0,35	0,47	
413		28,1	7	12,47	12,61		0,23		
414		27,0	21		13,62				
415		28,1	22	10,91	11,72		0,90		
416		29,8	27		13,12				
417		27,2	27		13,12				
418		28,5	31		13,62				
419		26,3	37		13,42				
420		37,7	24 5		13,62				
421		31,2	8	10,91	11,36		0,54		
422		36,7	27	12,22	12,74		0,61		
423		36,9	26 0	11,63	12,00		0,46		G_5
424		32,5	30	8,62	9,35		0,82		
425		39,8	37		12,67				
426		34,8	51		12,68				
427		36,2	51	12,60	12,68		0,17		
428		36,9	54	11,78	11,35	11,57	−0,04	−0,21	
429		32,6	57	12,61	12,69		0,17		

ДВГТБ

ЭР01663

№№ п/п.	№№ B. D.	D	A	Фотовиз.	Фотогр.	Фиолет.	Фотовиз. С. I.	Фиол.-виз. С. I.	Спектры
430		39,0	27 9		13,53				
431		39,3	11		13,53				
432		34,1	26	11,77	11,50		−0,18		
433		36,6	45		11,54				
434		35,7	49	10,25	10,55		0,39		F_0
435		32,2	51	12,58	12,66		0,17		
436		32,9	28 2		13,53				
437		32,2	12	11,75	11,96		0,30		
438		35,5	25	9,55	10,53		1,07		
439		32,8	30	12,56	13,01		0,54		K_0
440		34,4	38	11,20	11,25		0,14		
441		30,1	46	12,22	13,52		1,39		
442		38,3	29 27		13,50				
443		31,0	43	12,55	12,62		0,16		
444		36,9	30 1	11,32	11,23	11,20	0,00	−0,12	
445		38,6	7		13,29				
446		33,4	9		12,76				
447		33,1	25	11,80	12,07		0,36		
448		34,8	31 7		12,99				
449		39,0	10		13,48				
450		32,1	11	11,74	12,28		0,55		
451		31,1	12	12,53	12,99		0,55		
452		30,2	14	10,60	12,08	12,55	1,57	1,95	
453		30,0	22	10,60	10,88		0,37		F_0
454		36,9	30	11,71	12,98		1,36		
455		34,9	31	12,27	12,61		0,43		
456		30,9	35	11,72	12,07		0,44		
457		32,6	36	12,53	12,27		−0,17		
458		32,8	38	11,72	11,93		0,30		
459		38,3	38	11,47	12,60	13,12	1,22	1,65	
460		35,7	43	12,26	12,60		0,43		
461		31,6	49	11,32	11,59	11,68	0,36	0,36	
462		38,8	58	9,51	9,56		0,14		
463		35,7	32 4	10,94	12,61		1,75		
464		30,7	9	10,07	10,01		0,03		B_8
465		30,7	15		12,83				
466		34,1	23	12,53	12,61		0,17		
467		31,8	25	12,53	13,49		1,05		
468		38,0	40		12,99				
469		36,5	43	12,53	12,83		0,39		
470		37,9	57	12,52	12,60	13,12	0,17	0,60	
471		31,7	56	12,11	11,93	11,68	−0,09	−0,43	
472		30,7	33 2	12,53	12,99		0,55		
473		30,7	8	11,71	11,78		0,16		
474		38,3	11		13,48				
475		36,2	15		13,29				
476		36,3	19	12,52	12,60		0,17		
477		32,8	38	11,72	11,93	12,00	0,30	0,28	
478		35,5	40	12,27	11,93	11,68	−0,25	−0,59	
479		31,7	50	12,55	12,62	12,71	0,16	0,16	

РВГБ

ЭР01663

№№ п/п.	№№ B. D.	D	A	Фотовиз.	Фотогр.	Фиолет.	Фотовиз. С. I.	Фиол.-виз. С. I.	Спектры
480		31,2	56	12,37	12,28	12,00	0,00	−0,37	
481		34,8	56	12,53	12,61		0,17		
482		38,0	58	12,52	12,98		0,55		
483		35,9	59		12,99				
484		33,1	59	10,72	10,87		0,24		A_5
485		39,3	34 8	12,52	12,60		0,17		
486		30,4	9	12,74	13,00		0,35		
487		38,2	18		13,49				
488		38,0	18		13,49				
489		36,5	20		12,99				
490		36,8	20		12,99				
491		30,0	23		13,00				
492		39,3	24		12,98				
493		39,8	30		12,98				
494		35,3	31	11,74	11,93		0,28		
495		30,9	33		13,00				
496		30,1	37		13,48				
497		38,6	39	10,66	11,39		0,82		
498		30,0	41	12,23	11,80		1,66		
499		39,3	44		13,49				
500		32,8	46	11,72	12,07		0,44		
501		31,4	51	12,35	12,61		0,35		
502		34,4	55		12,99				
503*	50°3380	32.8	58	8,54	8,67		0,22		B_9
504		34,6	59		12,99				
505		31,1	35 0		13,30				
506		39,0	8	10,96	11,08		0,21		A_3
507		38,3	20	10,33	11,08		0,29		A_3
508		31,2	21	11,75	12,86		1,20		
509		31,6	22		13,52				
510		32,0	21		13,52				
511		35,4	30	9,54	9,58		0,13		A_0
512		38,6	33	10,96	11,08		0,22		A_5
513		34,5	33		13,00				
514		34,4	33		13,50				
515		34,1	35	10,97	10,89		0,01		A_0
516		33,1	36		13,01				
517		30,1	36		13.51				
518		32,1	37		13,51				
519		36,9	38		13,00				
520		36,0	38		13,50				
521		30.1	41	10,53	10,00	10,35	−0,01	−0,18	
522		31,0	44	10,61	10,43	10,35	−0,09	−0,26	
523		32,8	45	11,75	11,47	11,43	−0,19	−0,32	
524		28,6	55	12,13	12,48		0,44		
525		32,3	56	10,37	10,53	10,68	0,25	0,31	
526		31,4	36 4		13,52				
527		32,4	4		13,52				
528		33,2	6	12,30	12,64	13,16	0,43	0,86	
529		37,8	14	10,17	10,23	10,61	0,15	0,44	G_5
530		31,6	15	12,57	12,87		0,39		
531		36,2	15	10,97	11,96		0,08		
532		35,6	19	12,22	11,96		0,17		

ЛВГТБ

ЭР01663

№№ п/п.	№№ B. D.	D	A	Фотовиз.	Фотогр.	Фиолет.	Фотовиз. С. I.	Фиол.-виз- С. I.	Спект
533		33,0	39	11,36	11,63	11,84	0,36	0,48	
534		31,1	43	11,76	12,31		0,64		
535		36,2	44	9,41	10,04		0,72		G_0
536		32,0	47		13,03				
537		35,1	50		13,53				
538		32,6	37 9		13,54				
539		34,7	10		13,54				
540		38,3	11		13,53				
541		31,5	13		13,04				
542		33,4	16	11,00	11,64		0,73		
543		30,0	22	10,85	12,67		1,91		
544		32,8	24	12,16	11,98	11,00	—0,09	—0,43	
545		37,0	31		13,04				
546		36,1	42		12,80				
547		33,1	46		13,05				
548		39,3	38 1	9,94	11,75	12,30	1,90	2,36	
549		38,0	9	11,40	13,57		2,26		
550		39,3	17		13,57				
551		37,6	26		13,07				
552		36,2	58	11,17	12,70		1,62		
553		31,4	39 2	11,81	12,03	12,16	0,31	0,35	
554		33,4	8	12,62	12,93		0,40		
555		31,3	39	10,69	12,04	12,07	1,44	1,47	
556		36,0	50	12,22	12,04	11,78	—0,09	—0,44	
557		33,6	40 1	7,32	7,04		—0,19		B_9
558		32,3	1		13,60				
559		30,7	1		12,73				
560		35,5	2		13,60				
561		37,0	21	10,91	11,00	11,32	0,18	0,41	
562		39,8	28		13,62				
563		49,0	23 58	8,49	9,38		—0,02		F_5
564		47,6	24 20	10,90	10,98		0,17		
565		40,7	34	11,83	11,34		—0,40		
566		46,2	25 10		13,05				
567		44,8	26 9	12,15	12,65		0,59		
568		42,3	11	9,11	9,50		0,48		F_5
569		46,3	24		12,87				
570		49,3	36	8,57	9,47		0,99		K_0
571		44,7	54	12,14	12,30		0,25		
572		45,3	56	12,56	13,02		0,55		
573		46,7	27 2		13,21				
574		45,7	4	11,20	11,61		0,50		F_5
575		41,7	14		11,82				
576		45,3	15	10,61	10,23	10,19	—0,29	—0,42	A_0
577		44,5	21		13,51				
578		43,0	44	12,06	13,51		1,54		
579		44,1	47	12,14	13,51		1,46		

ЦВТБ

ЭР01663

№№ п/п.	№№ B. D.	D	A	Фотовиз.	Фотогр.	Фиолет.	Фотовиз. С. 1.	Фиол.-виз. С. 1.	Спектры
580		40,3	28 6		13,50				
581		40,3	18		13,00				
582		41,4	21		13,49				
583		41,4	29	12,53	12,83		0,39		
584		45,7	41		12,99				
585		49,0	49		12,98				
586		41,3	29 4	10,21	10,51	10,65	0,39	0,44	F_0
587		46,5	5	12,10	11,78	11,53	—0,23	0,57	
588		46,7	9	10,71	10,86		0,24		F_0
589		47,6	9	11,08	11,44		0,45		
590		47,9	30	12,52	12,98		0,55		
591		42,2	36	11,95	12,61		0,75		
592		45,5	37	11,47	11,78		0,40		
593		49,8	45	12,51	12,97		0,55		
594		49,2	30 0		13,47				
595		48,4	22	10,56	10,85		0,38		
596		45,0	27	12,51	12,97		0,55		
597		41,1	31	12,10	12,46		0,45		
598		42,4	39	10,56	10,73	10,87	0,26	0,31	A_5
599		43,4	41	11,70	12,13	12,29	0,52	0,59	
600		41,4	45		13,47				
601		43,7	45	12,51	12,97		0,55		
602		44,3	45	12,51	13,47		1,05		
603		46,0	51	12,51	12,13		—0,29		
604		41,3	31 11	10,92	12,13	12,34	1,30	1,42	
605		48,0	17	11,69	11,90	12,07	0,30	0,38	
606		41,1	28	10,19	12,73		2,63		
607		49,7	36	10,55	11,90	13,09	1,44	1,54	
608		45,7	36		12,97				
609		42,7	42	9,35	10,39	10,55	1,12	1,19	K_0
610		47,3	56	12,24	12,72		0,57		
611		49,3	32 1		13,25				
612		47,0	29	11,69	12,96		1,36		
613		47,1	44	11,29	12,96		1,36		
614		47,1	44	11,69	13,46		1,86		
615		49,0	59	11,53	11,90	12,06	0,46	0,53	
616		46,1	59		13,47				
617		46,8	33 2		13,47				
618		45,0	11	11,30	12,97		1,75		
619		42,1	27	11,71	12,98		1,36		
620		46,3	33		12,97				
621		59,8	45	11,69	12,24	12,40	0,64	0,71	
622		46,0	46	10,92	11,05		0,22		
623		42,2	48	10,57	10,74		0,26		
624		44,9	52		12,97				
625		41,4	54	10,93	11,06		0,22		
626		47,7	55	10,19	11,57		1,47		
627		46,6	56		12,97				
628		40,3	34 5		13,48				
629		45,7	26	11,30	11,77		0,56		
630		46,0	36	10,64	10,49	10,41	—0,06	—0,23	B_8

ЭР01663

№№ п/п.	№№ B. D.	D	A	Фотовиз.	Фотогр.	Фиолет.	Фотовиз. С. I.	Фиол.-виз. С. I.	Спектры
631		59,1	39	11,06	11,20		0,23		
632		42,6	45		13,47				
633		41,7	52	12,52	12,82		0,39		
634		59,0	57		12,81				
635	50°3382	46,1	35 1	7,46	8,65		1,28		K_5
636		45,7	10	10,77	11,57		0,89		
637		42,8	12		12,98				
638		47,6	24	10,70	11,57	11,94	0,96	1,24	
639		45,0	31		12,60				
640		42,1	31	10,93	12,60	13,12	1,76	2,19	
641		47,1	39						
642		49,7	39		13,48				
643		42,0	46	10,58	10,75		0,26		
644		42,3	49		12,97				
645		46,4	55		13,48				
646		42,4	36 6	10,94	11,39		0,54		
647		50,2	18	8,38	10,21	11,12	1,92	2,74	M
648		48,0	35		13,30				
649		49,0	51		13,30				
650		46,9	51		13,30				
651		46,3	53		13,31				
652		45,6	56		13,31				
653		44,8	59	10,10	9,91		−0,10		B_2
654		41,1	37 7	12,56	12,63		0,16		
655		43,7	4		13,51				
656		43,8	14	11,75	12,17	12,40	0,51	0,65	
657		42,9	27		13,01				
658		43,6	29	10,24	11,47		1,32		
659		49,8	33		13,01				
660		43,2	36	11,35	13,51		2,25		
661		47,0	42		13,01				
662		48,3	44		13,52				
663		46,4	50		12,86				
664		45,9	38 5		13,53				
665		43,2	7		13,53				
666		47,0	19		13,03				
667		48,3	24	11,36	11,63	11,80	0,36	0,44	
668		42,2	33	11,94	11,65		−0,20		
669		45,5	57	10,27	11,37	11,84	1,19	1,57	
670		43,2	39 6		13,54				
671		48,9	25		13,56				
672		45,7	38		12,69				
673		41,1	39	12,03	12,01		−0,07		
674		43,6	45		13,08				
675		48,6	40 6	11,40	11,54	11,66	0,23	0,26	
676		42,3	14		13,10				
677		41,3	18	11,83	13,10		1,36		
678		40,3	22		13,11				
679		46,5	53	10,33	10,62		0,38		

ЛВГФ

ЭР01663

№№ п/п.	№№ B. D.	D	A	Фотовиз.	Фотогр.	Фиолет.	Фотовиз. С. I.	Фиол.-виз. С. I.	Спектры
680	50°3325	51,1	23 11	8,14	7,88		−0,17		A_2
681		57,3	20	11,84	12,39		0,64		
682		51,7	28	10,91	11,36	11,36	0,54	0,45	
683		56,7	39	12,23	12,73		0,59		
684		50,1	52	9,30	9,10		−0,11		F_2
685		54,8	24 4	11,05	11,34		0,38		
686		58,9	9	10,66	10,59	10,34	0,62	−0,25	
687		55,2	32		13,57				
688		56,9	52		13,57				
689		57,6	25 8	12,59	12,67		0,17		
690		59,7	34	12,02	11,97		0,04		
691		53.2	43	12,00	12,20		0,29		
692		58,3	26 7	0,82	10,72	10,45	−0,01	−0,37	
693		51,4	8		13,03				
694		48,3	28	10,24	11,26		1,11		K_0
695		41,7	40		13,12				
696		59,8	44	10,97	11,10	11,22	0,22	0,29	
697		58,3	49	11,19	12,84		1,74		
698		53,5	49	12,14	13,51		1,46		
699		57,6	51	10,60	10,88		0,37		
700		57,8	58	11,34	11,24	11,03	−0,01	−0,31	
701		58 6	27 20	10,79	11,39		0,69		
702		54,1	21	10,81	11,94		1,22		
703		59,3	24	11,72	12,99		1,36		
704		58,5	24	9,19	8,99		−0,11		B_2
705		51,4	26	9,54	9,28		−0,17		B_3
706		50,8	40	10,57	12,60		2,12		
707		59,0	41		13,50				
708		56,2	47	10,57	11,92		1,44		
709		53,6	48		12,99				
710		50,3	49	12,53	12,61		0,17		
711		51,7	28 1		12,99				
712		54,0	4	9,29	9,10		−0,10		B_2
713		53,7	9		12,82				
714		53,4	25	12,10	12,82		0,81		
715		57,0	29	12,10	12,81		0,80		
716		50,1	32	12,52	12,82		0,39		
717		55,2	34	12,09	12,59		0,59		
718		51,0	45	11,70	12,60		0,99		
719	50°3355	57,5	55	8,89	8,65		−0,15		A_0
720		53,6	29 14	12,33	12,59		0,35		
721		53,2	20	12,51	13,27		0,85		
722		53,3	20		13,47				
723		59,7	34	10,68	11,89	12,13	1,30	1,45	
724		56,2	41	11,06	12,96		1.99		
725		54,0	46	11,69	12,12	12,28	0,52	0,58	
726		50,6	51	10,84	11,57		0,82		
727		50,6	55		13,47				
728		51,5	59	12,51	12,97		0,55		

ЛВГБ

ЭР01663

№№ п/п.	№№ B. D.	D	A	Фотовиз.	Фотогр.	Фиолет.	Фотовиз. С. I.	Фиол.-виз. С. I.	Спектры
729		57,1	30 3		12,95				
730		59,3	7	11,68	12,95		1,36		
731		57,1	11	11,68	11,89	12,06	0,30	0,38	
732		56,0	12	12,19	12,95		0,85		
733		51,4	21	12,50	12,80		0,39		
734	50°3360	57,1	27	8,50	9,12		0,71		G_0
735		51,3	50		13,48				
736		52,7	59		13,45				
737		56,2	31 8		12,94				
738		53,4	20	10,90	11,41	11,57	0,60	0,67	
739		56,5	22	12,48	13,44		1,05		
740		57,6	23	12,48	12,70		0,31		
741		58,3	30	11,67	13,44		1,86		
742		52,3	41	10,90	11,19	11,32	0,38	0,42	
743		54,0	47	12,49	12,57		0,17		
744		56,2	51		13,44				
745		54,7	52		12,95				
746		52,1	32 10	12,07	12,23	12,35	0,25	0,28	
747		53,1	21	11,91	13,45		1,63		
748		51,8	35	12,07	12,11	12,32	0,13	0,35	
749		59,3	33 3	11,43	12,94		1,60		
750		51,4	18	11,52	11,63	11,84	0,20	0,32	
751		58,6	33		13,44				
752		57,1	35		13,45				
753		55,0	37	12,49	12,57		0,17		
754		52,5	46	10,04	10,38		0,43		F_2
755		51,6	34 10	12,50	12,58		0,17		
756		51,4	16	12,50	12,80	13,09	0,39	0,59	
757		59,8	31	12,49	12,95		0,55		
758		58,8	32		13,45				
759		59,1	35	12,49	12,79		0,39		
760		55,7	40		13,46				
761		53,6	42	10,56	10,73		0,26		
762		53,8	42		13,46				
763		52,1	46		13,46				
764		53,1	51	12,08	12,96		0,97		
765		54,5	51	12,08	13,46		1,47		
766		54,0	53	12,08	13,46		1,47		
767		59,9	53	11,29	11,56		0,36		
768		54,3	35 1	12,50	12,24	12,14	—0,17	—0,34	
769		50,2	4	10,92	12,39	13,26	1,56	2,34	
770		56,8	6	12,16	13,46		1,39		
771		58,7	8	12,16	13,46		1,39		
772		53,2	16	11,45	12,12		0,76		
773		51,4	20	10,19	10,19	10,20	0,09	0,01	A_0
774		58,7	24		12,83				
775		56,2	27	9,83	9,54		—0,20		B_2
776		54,0	27		12,97				
777		52,2	30		13,47				
778		58,9	37		13,46				
779		56,0	47	11,93	11,43	11,31	—0,41	—0,62	

РГГБ

ЭР01663

№№ п/п.	№№ B. D.	D	A	Фотовиз.	Фотогр.	Фиолет.	Фотовиз. С. I.	Фиол.-виз. С. I.	Спектры
780		50,9	49	10,57	10,50	10,46	0,02	—0,11	B_8
781		52,9	54	9,65	9,88	10,22	0,32	0,57	F_0
782		54,8	55		12,98				
783		59,0	59	10,92	10,85		0,02		B_8
784		53,9	59	11,94	12,60		0,75		
785		59,5	36 7	12,33	12,60	13,26	0,36	0,93	
786		58,9	7	10,77	12,59	13,10	1,91	2,33	
787		56,4	8	10,78	12,14	13,12	1,45	2,34	
788		54,4	14		13,28				
789		52,1	27	12,52	12,60		0,17		
790		57,7	33	12,11	12,99		0,97		
791		52,6	45		12,84				
792		58,2	47	12,53	12,99		0,55		
793		52,0	49	11,74	11,94	12,39	0,29	0,64	
794		50,9	49	11,58	11,80	11,99	0,31	0,41	
795		52,4	54	11,72	12,99		1,36		
796		55,2	54		12,84				
797									
798		55,4	37 4		13,50				
799		55,4	8		13,50				
800		54,8	15	12,37	12,84		0,56		
801		52,7	21		13,51				
802		50,1	25	10,97	11,25	11,40	0,37	0,43	
803		58,5	33	11,74	12,28	12,55	0,63	0,81	
804		57,9	36	10,81	11,46		0,74		
805		55,9	38	10,70	12,29		1,63		
806		53,4	44	11,91	12,63		0,81		
807		54,5	38 6	11,51	12,10	12,27	0,68	0,76	
808		52,4	23		12,87				
809		59,9	27	10,97	11,26	11,57	0,38	0,40	
810		57,2	27		13,53				
811		56,4	34	12,57	13,53		1,05		
812		58,8	43	12,57	12,31	12,26	—0,17	—0,31	
813		55,1	45	10,77	10,92	11,09	0,24	0,42	
814		56,6	39 1	12,16	12,20	12,30	0,13	0,14	
815		58,6	5	10,26	10,26	10,25	0,09	—0,01	A_0
816		50,7	41	11,40	12,01	12,48	0,70	1,08	
817		53,5	46	4,69	4,61		—0,01		B_8
818		42,3	47	12,35	12,23	12,32	—0,03	—0,13	
819		53,4	53		13,57				
820		50,7	58	12,19	12,70		0,60		
821		50,7	40 1	10,22	10,10	10,07	—0,03	—0,15	B_9
822		55,2	4	12,19	12,70		0,60		
823		50,7	7		12,92				
824		52,1	7	12,43	13,08		0,70		
825		53,0	8	12,61	13,08		0,56		
826		53,4	27		13,09				
827		52,3	31		12,93				
828		53,8	40		12,94				
829		52,4	53	12,22	12,38		0,25		

ЛБТНБ

ЭР01663

№№ п/п.	№№ B. D.	D	A	Фотовиз.	Фотогр.	Фиолет.	Фотовиз. С. I.	Фиол.-виз. С. I.	Спектры
830		50,3	54	12,65	12,73		0,17		
831		57,6	54		12,96				
832		57,6	41 8	11,52	11,72		0,29		
				51°00					
833		5,3	22 49	9,14	9,01		—0,04		F_5
834		7,2	23 17	10,61	11,70		1,18		
835		7,1	25 0		13,34				
836		4,6	5	11,37	12,32	12,44	1,04	1,07	
837		4,7	6	11,77	13,04		1,36		
838		4,3	52	12,30	12,63		0,42		
839		5,4	26 1	11,91	11,88	11,85	0,03	—0,06	
840		0,6	18	10,60	10,88		0,37		
841		6,6	20	10,60	11,24		0,73		
842		1,3	24	12,21	12,62		0,50		
843		5,1	27 1	11,72	11,93	12,24	0,30	0,52	
844		7,1	29	12,53	12,99		0,55		
845		4,3	34	12,53	12,99		0,55		
846		0,6	57	12,52	12,98		0,55		
847		4,6	28 0	12,51	12,97		0,55		
848		9,9	13	11,30	12,13		0,92		
849		10,0	35		13,46				
850		8,0	45	10,30	10,37	10,53	0,16	0,23	F_2
851		9,9	34		13,45				
852		7,1	29 1	12,31	12,43	12,52	0,21	0,21	
853		2,1	21		13,45				
854		8,7	35		13,41				
855		8,7	39	12,30	12,56	12,87	0,35	0,57	
856		2,7	44	11,43	12,40	12,65	1,06	1,22	
857		3,2	49		12,94				
858		7,0	55		13,44				
859		1,4	30 1		12,95				
860		3,3	2	10,89	10,90	11,02	0,10	0,13	
861		2,9	5		13,14				
862		8,2	7	11,67	11,67	11,78	0,09	0,11	
863		1,1	7		13,44				
864		9,1	17		13,44				
865		7,0	18		13,44				
866		5,0	24		13,44				
867		7,9	37		13,44				
868		2,0	40		12,94				
869		1,8	43		12,94				
870		4,0	43		13,44				
871		2,9	46	11,67	11,88	12,31	0,30	0,64	
872		4,1	58	11,67	11,74		0,16		
873		2,7	31 5		13,44				
874		2,5	7	10,53	11,88	13,07	1,45	2,54	
875		8,2	10	11,10	11,17	11,45	0,16	0,35	

РВГБ

ЭР01663

№№ п/п.	№№ B. D.	D	A	Фотовиз.	Фотогр.	Фиолет.	Фотовиз. С. I.	Фиол.-виз С. I.	Спектр
876		2,3	23	11,27	11,18		0,00		
877		10,0	27	10,87	11,53		—0,25		
878		3,6	31		13,44				
879		9,6	36	12,28	12,55		0,36		
880		8,4	51	12,52	13,43		1,00		
881		8,2	59		13,43				
882		9,1	32 1	11,25	12,55		1,39		
883		10,0	2	10,51	12,21		1,79		
884		5,5	37	9,12	8,96		—0,07		F_5
885		9,1	44		13,43				
886		3,8	47	11,67	12,02		0,44		
887		4,1	57	12,04	12,69		0,74		
888		4,5	58	9,47	11,18		1,80		M
889		0,7	33 1		12,56				
890		6,0	4	10,25	9,95	9,85	—0,21	—0,40	A_0
891		2,5	7		13,43				
892		5,6	7	10,87	11,87		1,09		
893		3,6	8		13,43				
894		2,0	10	10,51	10,82	11,04	0,40	0,53	
895		2,1	14		13,44				
896		1,1	22	9,81	9,84		0,12		A_3
897		4,2	24	10,87	11,01		0,23		A_5
898		4,1	34 3	12,48	13,44		1,05		
899		0,9	5	11,67	11,88	12,04	0,30	0,37	
900		3,4	24	11,68	12,95		1,36		
901		3,2	34	10,75	10,83	10,85	0,17		A_5
902		3,6	35	11,28	12,95		1,76		
903		5,1	43	9,82	11,89	12,71	2,16	2,89	
904		4,6	45		12,95				
905		0,3	46		12,95				
906		6,2	48		13,44				
907	50-3381	4,2	59	7,77	8,95	10,19	1,27	2,42	K_5
908		2,1	35 5		12,95				
909		5,5	8	12,31	12,23		0,01		
910		7,0	9	11,28	11,19		0,00		
911		9,6	15		12,95				
912		2,9	25	9,83	12,24		2,50		
913		2,7	27		12,58				
914		4,1	41		13,46				
915		9,1	58	8,35	9,86	10,54	1,60	2,19	K_5
916		3,8	36 3	12,51	12,81		0,39		
917		7,7	4	12,50	12,24	12,19	—0,17	—0,31	
918		6,1	8	12,50	12,80		0,39		
919		6,3	9	12,50	12,80		0,39		
920		4,8	14	12,51	12,81	13,10	0,39	0,59	
921		0,1	15	12,51	12,59	13,10	0,17	0,59	
922		5,7	18		12,25				
923		2,9	24		12,59				
924		2,8	25		12,46				
925		5,3	35	12,52	13,48		1,05		
926		6,7	38		13,48				

ДВГНБ

ЭР01663

№№ п/п.	№№ B. D.	D	A	Фотовиз.	Фотогр.	Фиолет.	Фотовиз. С. I	Фиол.-виз. С. I.	Спектры
927		3,9	40		12,90				
928		5,5	44	12,10	12,92		0,91		
929		3,1	51	10,20	10,20	10,56	0,09	0,36	A_0
930		0,8	51		12,97				
931		2,7	59	12,53	12,27	12,22	—0,17	—0,31	
932		1,0	37 18		13,49				
933		5,6	18	11,95	12,99		1,13		
934		7,4	20	10,34	11,59	11,90	1,34	1,56	
935		4,7	36	11 97	11,72		—0,16		
936		3,7	40	12,55	12,20		—0,21		
937		5,7	43	12,37	12,28		0,00		
938		6,5	47	12,13	12,28		0,24		
939		9,1	38 2	12,13	13,50		1,46		
940		2,0	5	10,75	10,89	11,15	0,23	0,40	
941		7,1	5	11,82	12,28	13,01	0,55	1,19	
942		8,1	10	12,34	12,28		0,03		
943		1,6	17	12,56	12,85		0,38		
944		6,1	22	12,55	12,84	13,15	0,38	0,60	
945		1,7	29	8,24	3,38		0,23		F_8
946		7,4	36	8,33	9,91	11,45	1,67	3,12	K_5
947		9,3	37	12,56	13,01	13,16	0,54	0,60	
948		2,4	47	12,22	12,30		0,17		
949		0,6	52	11,76	12,28	12,42	0,61	0,66	
950		8,8	59	12,57	13,03		0,55		
951		1,4	39 1	11,77	11,63		—0,05		
952		1,7	22		13,34				
953		5,4	47	11,38	11,73		0,45		
954		8,3	40 2		13,55				
955		0,3	17	9,27	9,07		—0,11		B_0
956		5,4	45	12,35	11,79		—0,47		
957		0,1	55	10,38	12,26	12,54	1,97	2,16	
958		6,3	41 32	11,68	12,06	12,30	0,47	0,62	
959		15,9	23 15	12,05	12,23		0,27		
960		15,6	38	9,97	9,68		—0,20		B_3
961		17,1	38		12,72				
962		18,3	24 11	11,40	11,31	11,26	0,00	—0,14	
963		19,3	58	10,63	10,92		0,38		
964		15,6	25 34	10,75	10,90		0,24		F_2
965		18,4	34		12,78				
966		11,1	37	12,14	12,63		0,58		
967		12,0	26 21	10,60	10,51	10,48	0,00	—0,12	
968		17,1	26		13,49				
969		16,4	28		12,61				
970		12,1	41		12,99				
971		12,6	27 4		12,99				
972		13,4	19	12,10	12,26		0,25		

ЛВГФ

ЭР01663

№ № п/п.	№№ B. D.	D	A	Фотовиз.	Фотогр.	Фиолет.	Фотовиз. С. I.	Фиол.-виз. С. I.	Спектры
973		16,6	32	10,93	12,60		1,76		
974		19,3	52	10,77	11,01		0,33		A_5
975		13,4	52		13,47				
976		13,4	57		13,47				
977		12,6	28 0	11,07	10,85	10,60	—0,13	—0,47	
978		15,1	1	12,51	13,47		1,05		G_5
979		19,7	12	11,18	12,24	23,09	1,15	1,90	
980		17,3	13	11,69	12,58		0,96		
981		18,2	21	12,32	12,96		0,73		G_0
982		18,3	21	12,50	12,96		0,55		
983		19,7	22	12,07	12,57		0,59		F_5
984		19,6	26	11,84	12,57	12,69	0,82	0,85	
985		19,6	32	12,07	12,57	12,69	0,59	0,62	F_5
986		16,1	29 5	11,67	11,88	12,03	0,30	0,36	
987		17,9	10	12,48	13,44		1,05		
988		15,6	14	10,02	11,18	11,91	1,25	1,89	
989		12,7	25	11,12	11,18	11,31	0,15	0,19	
990		15,1	30	12,48	12,56	12,93	0,17	0,45	
991		11,5	39		13,44				
992		16,4	41	10,61	12,56		2,04		
993		10,9	42		12,22				
994		11,0	52		13,44				
995		17,2	55		13,44				
996		17,5	55	11,90	13,44		1,63		
997		18,0	30 8	10,89	11,18		0,38		
998		16,2	21		13,44				
999		12,9	22	11,27	12,56	12,87	1,38	1,60	
1000		14,3	51	12,45	13,43		1,08		
1001		18,6	52	11,25	11,17	11,16	0,01	—0,09	
1002		17,1	31 11	12,03	12,20	12,53	0,26		
1003		18,0	21	12,27	12,54		0,36		
1004		18,6	26	9,78	10,14		0,45		
1005		16,1	26	10,86	10,80	10,79	0,03	—0,07	
1006		10,4	36	12,46	13,42		1,05		
1007		10,4	41	12,04	12,55		0,60		
1008		11,6	45	10,87	10,81		0,03		
1009		19,8	47	11,48	11,38	11,18	—0,01	—0,30	
1010		16,3	52	12,63	12,92		0,38		
1011		12,1	59	11,81	13,43		1,71		
1012		12,0	32 23	11,65	11,87	12,01	0,31	0,36	
1013		12,9	26	9,45	9,21		—0,15		B_0
1014		19,5	29	12,43	12,54		0,20		
1015		14,3	31	11,73	13,43		1,79		
1016		13,2	40	10,27	10,97	11,18	0,79	0,91	
1017		19,2	43		12,76				
1018		14,1	33 0	12,51	13,43		1,01		
1019		15,2	18		13,43				
1020		17,9	24	12,03	12,54		0,60		
1021		15,7	24	9,24	10,14	10,49	0,99	1,25	K_0
1022		16,0	25	10,50	10,60	10,75	0,19	0,25	F_0

ЭВГБ

ЭР01663

№№ п/п.	№№ B. D.	D	A	Фотовиз.	Фотогр.	Фиолет.	Фотовиз. С. I.	Фиол.-виз. С. I.	Спектры
1023		14,4	44	11,25	11,53	11,63	0,37	0,38	
1024		14,2	51	11,25	12,93		1,77		
1025		13,6	62		13,23				
1026		11,3	59		13,44				
1027		12,1	34 11		13,44				
1028		16,6	18	12,06	12,22	12,31	0,25	0,25	
1029		12,9	20		12,94				
1030		13,6	23		12,94				
1031		18,6	25	11,67	12,94		1,36		
1032		14,3	35	12,48	12,56		0,17		
1033		16,4	41	12,67	12,56		—0,02		
1034		12,1	46	12,48	12,56		0,17		
1035		11,1	35 2	10,54	10,63		0,17		
1036		19,1	4		13,45				
1037		12,1	21	11,68	11,89		0,30		
1038		17,7	24	12,31	11,89		—0,33		
1039		11,2	25		12,95				
1040		12,3	27	8,26	8,03		—0,14		B_9
1041		18,0	29	11,68	12,95		1,36		
1042		17,2	34	11,68	11,89	12,32	0,30	0,64	
1043		16,6	38		12,96				
1044		14,6	47	12,49	12,57	12,71	0,17	0,22	
1045		13,7	55	10,75	10,48		—0,18		B_2
1046		13,5	36 7	12,08	12,96		0,97		
1047		16,2	8	12,50	12,96		0,55		
1048		18,8	10	12,08	12,24	12,33	0,25	0,25	
1049		12,7	27	12,68	13,46		0,87		
1050		19,1	31	12,50	12,80		0,39		
1051		16,0	44	10,56	12,97		2,50		
1052		13,3	47	9,17	10,85	11,09	1,77	1,92	K_5
1053		15,5	59	12,09	12,97		0,97		
1054		17,6	37 3	11,71	13,48		1,86		
1055		13,7	4	11,31	11,92	12,08	0,70	0,77	
1056		18,6	8	0.47	11,22	11,96	1,84	2,49	M
1057		16,9	12	11,31	11,58	11,78	0,36	0,47	
1058		11,2	22	12,34	12,98		0,73		
1059		15,3	23	11,09	11,23	11,65	0,23	0,56	
1060		13,8	27	11,88	11,59		—0,20		
1061		16,4	29	11,72	13,46		1,86		
1062		10,2	32	12,12	13,49		1,47		
1063	50°3401	10,9	38	6,88	7,47		0,68		K_2
1064		14,0	38		12,99				
1065		11,0	41	11,32	13,49		2,26		
1066	50°3403	15,5	44	8,30	8,13		—0,08		A_2
1067		11,4	44	11,72	13,49		1,86		
1068		13,4	45	12,53	12,99		0,46		
1069		13,6	38 23		13,00				
1070		12,7	25	9,33	9,59		0,35		F_2
1071		11,6	28		13,01				
1072		12,1	34		13,01				
1073		19,1	46	12,59	12,33		—0,17		

ЛВГНБ

ЭР01663

№№ п/п.	№№ B. D.	D	A	Фотовиз.	Фотогр.	Фиолет.	Фотовиз. С. I.	Фиол.-виз. С. I.	Спектры
1074		11,0	39 35		13,03				
1075		18,7	39		13,53				
1076		10,5	50	10,63	10,46		—0,08		
1077		12,5	40 13	9,92	10,27		0,44		
1078		16,4	23	12,59	13 05		0 55		
1079		19,7	27		13,56				
1080		19,3	31		13,06				
1081		17,9	33		13,07				
1082		19,1	35	11,80	12,01		0,30		
1083		18,9	51		13,08				
1084		14,5	54		12,70				
1085		12,4	56		13,59				
1086		14,6	57	11,82	11,89		0,16		
1087		11,8	41 13	11,04	11,55		0,61		
1088		18,9	15	9,76	9,73		0,06		A_0
1089		16,4	22	11,82	13,09		1,36		
1090		12,5	42		13,61				
1091		21,8	22 35	10,34	10,35	10,60	0,10	0,26	A_0
1092		29,3	44	12,08	12,07		0,08		
1093		23,0	58	12,21	12,73		0,61		
1094		29,8	23 21	12,65	12,95		0,30		
1095		28,2	34	12,63	12,37		—0,17		
1096		23,1	24 6	10,29	10,43	10,64	0,23	0,35	
1097		29,7	17		13 16				
1098		21,0	20		12,68				
1099		29,8	56		13,04				
1100		21,9	25 4	11,93	12,66		0,82		
1101		25,0	17	12,16	13,32		0,95		
1102		20,0	21		13,02				
1103		22,1	26	11 98	13,02		1,13		
1104		26,6	28	12,38	13,02		0,73		
1105		24,7	42		13,01				
1106		29,3	46		12,63				
1107		20,1	47	11,98	12,63		0,74		
1108		27,8	26 25		13,01				
1109		26,8	36	12,14	12,29		0,24		
1110		21,9	34	11,35	13,51		2,25		
1111		23,5	37	10,97	10,89		0,01		B_8
1112		21,5	52	12,11	12,99		0,97		
1113		28,5	57		13,29				
1114		20,1	57	11,71	11,50		—0,12		
1115		22,7	27 11		13,48				
1116		25,4	15		12,98				
1117		21,2	18	11,71	12,14	12,36	0,52	0,65	
1118		21,4	18	12,10	12,60		0,59		
1119		23,7	21	11,47	11,44		0,06		
1120		28,7	27	12,51	12,97		0,55		
1121		30,0	29	12,51	12,59		0,17		

ДВГНБ

ЭР01663

№№ п/п.	№№ B. D.	D	A	Фотовиз.	Фотогр.	Фиолет.	Фотовиз. С. I.	Фиол.-виз. С. I.	Спектры
1122		26,1	35	12,70	13,27		0,66		
1123		22,4	36	11,70	12,25	13,10	0,64	1,40	
1124		29,3	37		13,47				
1125		27,7	40		13,47				
1126		29,9	50		13,47				
1127		23,1	28 3	11,69	12,04	12,36	0,44	0,67	F_0
1128		22,0	8		13,01				
1129		25,7	10	11,69	11,68		0,08		
1130		20,4	11	11,69	11,36	11,28	—0,24	—0,41	
1131		21,2	17		13,46				
1132		28,7	21		13,46				
1133		24,3	22		13,46				
1134		23,7	23	10,91	11,90		1,08		
1135		21,5	30		13,46				
1136		23,5	51	12,49	12,57	12,93	0,17	0,44	
1136a		23,3	29 11	12,58	12,94		0,45		
1137		20,7	18	9,47	9,22		—0,16		B_0
1138		27,9	53	11,27	12,56		1,38		
1139		26,1	55	12,06	13,45		1,46		
1140		25,3	30 8		12,93				
1141		27,7	20		13,43				
1142		26,7	24		13,43				
1143		24,7	26	11,65	13,43		2,37		
1144		24,7	30		13,43				
1145		26,3	30	12,04	12,55	12,83	0,60	0,79	
1146		26,6	32		12,43				
1147		24,7	34	11,65	12,21	12,60	0,65	0,95	
1148		26,7	40	11,65	13,23		1,67		
1149		26,3	42		13,43				
1150		26,5	50	9,44	10,44	10,99	1,09	1,55	K_0
1151		23,3	58	11,80	12,12	12,96	0,41	1,16	
1152		21,3	31 29	11,87	13,42		1,64		
1153		20,6	47	12,03	12,92		0,98		
1154		22,6	58	12,01	11,86	11,74	—0,06	—0,27	
1155		21,7	32 12		13,42				
1156	50°3091	24,5	13	6,46	6,00		—0,37		B_9
1157		29,9	14	10,99	12,20	13,18	1,30	2,19	
1158		28,7	16	9,42	9,20		—0,13		
1159		22,1	18	11,46	11,16		—0,21		
1160		25,7	30	11,62	11,86	12,28	0,33	0,60	
1161		27,0	35	11,62	11,86	12,28	0,33	0,60	
1162		27,3	33 4	12,44	12,92	13,20	0,57	0,76	
1163		28,6	5		13,42				
1164		20,5	14	10,86	11,16	11,45	0,39	0,59	
1165		20,1	40	12,45	12,54	13,20	0,17	0,75	
1166		21,5	53	11,64	11,16		—0,39		
1167		25,0	55	10,51	12,54		2,12		
1168	51°3103	21,7	58	8,47	8,01		—0,37		A_0
1169		20,1	34 4		12,40				

ЛВГТБ

ЭР01663

№№ п/п.	№№ B. D.	D	A	Фотовиз.	Фотогр.	Фиолет.	Фотовиз. C. I.	Фиол.-виз. C. I.	Спектры
1170		22,2	27		12,93				
1171		22,0	32	12,30	12.10		—0,11		
1172		28,5	40		12,94				
1173		29,3	41		13,44				
1174		22,6	42		13,44				
1175		23,3	53		13,44				
1176		29,3	35 2	11,67	11,54		—0,04		
1177		20,9	6		12,56				
1178		28,2	14	10,67	11,18		0,60		
1179		29,1	15		12,78				
1180	51°3105	21,8	16	8,33	8,94		0,70		K_0
1181		23,3	37	9,48	10,23	11,10	0,84	1,62	G_5
1182		26,0	37		12,95				
1183		29,4	45	11,84	11,89	12,32	0,13	0,48	
1184		25,0	55	12,07	12,57	12,93	0,59	0,86	
1185		29,5	55	10,54	10,37		—0,08		B_3
1186		25,5	36 9	11,68	11,21		—0,38		
1187		21,2	17		12,59				
1188		25,9	19	12,25	11,69		—0,47		
1189		24,1	25		13,47				
1190		21,0	55	11,70	11,77		0,16		
1191		23,2	55		13,47				
1192		27,0	37 0	11,07	11,05		0,07		
1193		22,6	7		13,48				
1194		22,0	9	11,71	11,58	11,53	—0,04	—0,18	
1195		22,3	11	11,31	11.38	11,82	0,16	0,51	
1196		26,9	12	11,71	11,38		—0,24		
1197		27,5	14	12,10	12,18	12,72	0,17	0,62	
1198		21,0	16	12,02	12,98		1,05		
1199									
1200		23,6	17	10,49	10,86		0,46		F_2
1201		23,2	22		12.98				
1202		26,6	24		13,28				
1203		21,4	28	11,72	11,93	12,37	0,30	0,65	
1204		29,1	34		12,93				
1205		22,2	38	12,27	11,79	11,76	—0,39	—0,51	
1206		21,2	44	11,17	11,93		0,85		
1207		23,6	45	11,32	11,07		—0,16		
1208		27,0	46	12,19	12,47	13,13	0,37	0,94	
1209		24,1	54	12,53	12,99		0,55		
1210		21,6	55	11,72	12,61		0,98		
1211		29,3	38 0	11,72	12,99		1,36		
1212		20,6	4		13,49				
1213		26,6	15	10,60	11,94	12,76	1,43	2,16	
1214		26,5	24	11.11	11,60		0,58		
1215		29,1	25	10,96	11,94	13,15	2,07	2,19	
1216		27,4	27	9,88	10,88	11,56	1,09	1,68	
1217		29,3	43	12,56	12.63		0,16		
1218		26,7	44	11,75	13,01		1,35		
1219		20,1	50		13,51				
1220		25,5	39 4		13,52				

ДВГНБ

ЭР01663

№№ п/п.	№№ B. D.	D	A	Фотовиз.	Фотогр.	Фиолет	Фотовиз. С. I.	Фиол.-виз. С. I.	Спектры
1221		26,9	7	10,60	11,94		1,43		
1222		28,8	31	10,98	11,27		0,38		
1223		22,2	34		13,53				
1224		23,3	37	11,76	11,97	12,42	0,30	0,66	
1225		23,6	42	11,93	13,54		1,70		
1226		24,8	46		13,04				
1227		22,4	53		13,54				
1228		21,4	40 5	11,78	11,99	12,46	0,30	0,68	
1229		25,2	11	11,78	11,45		—0,24		
1230		26,2	11		13,05				
1231		29,0	13		13,05				
1232		29,3	16		13,05				
1233		26,4	16	9,25	9,95		0,79		G_5
1234		27,4	23		12,69				
1235		24,6	40	12,56	12,35		—0,12		
1236		32,8	49	11,40	11,05		—0,26		
1337		22,6	41 0	12,62	12,44		—0,09		
1238		25,5	5	11,27	11,05		—0,13		
1239		28,4	23	12,06	12,04		0,07		
1240		29,0	32	11,84	12,05	12,52	0,30	0,68	
1241		29,3	41	11,84	11,84		0,09		
1242		36,1	23 24		13,59				
1243		35,9	28	10,89	11,33		0,53		F_5
1244		39,3	49	12,28	12,02		0,17		
1245		39,6	51	12,28	12,70		0,51		
1246		37,1	51	12,44	12,80		0,45		
1247		36,8	24 0		13,57				
1248		38,0	22	10,29	11,47	12,08	1,27	1,79	K_5
1249		36,1	25 9		12,66				
1250		38,9	24	12,56	12,64		0,17		
1251		36,0	42	12,30	12,63	13,16	0,42	0,86	
1252		34,3	43	12,30	12,63	13,16	0,42	0,86	
1253		39,3	56	11,59	11,81	12,13	0,31	0,54	
1254		30,7	26 13		13,00				
1255		33,1	19		13,50				
1256		36,1	32		13,00				
1257		36,4	39		13,50				
1258		35,7	58	10,79	10,87	11,15	0,17	0,36	F_0
1259		35,0	27 26		13,48				
1260		37,1	40		12,59				
1261		33,8	42	9,50	9,25		—0,16		B_0
1262		35,4	43	9,50	9,25		—0,16		B_0
1263		37,6	44		12,81				
1264		37,5	54	12,09	12,25	12,50	0,25	0,41	
1265		37,1	58		13,47				
1266		38,7	28 8	10,19	9,87		—0,23		B_2
1267		30,0	11	11,70	12,13		0,52		
1268		37,1	11	12,25	12,81	13,10	0,65	0,85	

ЛВГНБ

ЭР01663

№ № п/п.	№№ B. D.	D	A	Фотовиз.	Фотогр.	Фиолет.	Фотовиз. С. I.	Фиол.-виз. С. I.	Спектры
1269		38,7	13	12,27	12,83		0,65		
1270		33,6	29 17		13,44				
1271		34,6	49	12,48	12,56	13,07	0.17	0,59	
1272		35,7	51		12,94				
1273	51°3082	36,2	53		7,37	7,42		0,14	A_0
1274		31,4	30 22	10,72	12,93		2,30		
1275		30,7	36	12,37	12,93	13,05	0,65	0,68	
1276		33,4	39	12,37	12,93		0,65		
1277		33,6	41	10,72	11,53		0,90		
1278		31,1	49	9,45	9,33		—0,03		A_0
1279		32,0	56		13,43				
1280		35,4	31 9	12,46	12,93	13,05	0,56	0,59	
1281		32,9	15	12,19	12,92	13,04	0,82	0,85	
1282		32,3	15		12,92				
1283		32,5	24		13,42				
1284		39,2	32 4		13,43				
1285		31,5	4	11,23	13,42		2,28		
1286		30,5	4		13,42				
1287		31,7	4	11,23	11,16		0,02		
1288		38,1	7	9,84	9,57		—0,18		B_0
1289		31,6	9		13,42				
1290		30,3	16		13,12				
1291		37,7	22		12,92				
1292		34,8	34		13,42				
1293		33,1	43		12,92				
1294		33,8	51	11,87	11,86	11,82	0,08	—0,05	
1295		37,4	33 17	12,46	12,93		0,56		
1296		37,0	30	10,87	11,01	11,46	0,23	0,59	
1297		33,2	35	12,04	11,87		—0,18		
1298		32,6	59	11,46	12,69	13,05	0,32	0,59	
1299		36,3	34 9		12,94				
1300		39,8	18	12,38	12,94		0,65		
1301		37,7	24		13,14				
1302		37,5	31	12,38	12,56		0,27		
1303		37,1	32	12,38	12,36	12,28	0,07	—0 10	
1304		35,0	36		13,44				
1305		32,7	43		12,56				
1306		35,7	44		13,44				
1307		38,6	45	11,67	11,18		—0,40		
1308		37,3	45		13,44				
1309		36,6	49		13,44				
1310		34,1	59		12,56				
1311		36,4	55 0		12,56				
1312		38,2	2		12,56				
1313		40,0	14	12,06	12,23	12,70	0,26	0,64	
1314		39,1	20	11,67	11,67		0,09		
1315		32,3	30	10,29	10,47	10,70	0,27	0,41	
1316		37,3	45		12,95				
1317		36,1	51		12,79				

ЛВГНБ

ЭР01663

№№ п/п.	№№ B. D.	D	A	Фотовиз.	Фотогр.	Фиолет.	Фотовиз. С. I.	Фиол.-виз. С. I.	Спектры
1318		32,7	36 21	10,17	11,56	12,32	1,48	2,15	
1319		35,9	22	12,49	12,58	12,96	0,18	0,47	
1320		36,4	26	12,49	12,96		0.55		
1321		38,8	26		12,96				
1322		38,2	36		12,73				
1323		38,4	41		12,73				
1324		39,3	45	10,40	10,39		0,08		A_0
1325		34,6	47		13,47				
1326		35,9	50		12,59				
1327		30,7	37 00	8,76	8,65		0,02		B_5'
1328		37,0	8	11,71	11,78	12,24	0,16	0,53	
1329		37,5	12	11,16	12,60		1,53		
1330		36,7	22		12,98				
1331		37,9	35	12,53	12,61	13,13	0,17	0,60	
1332		32,9	41		11,93				
1333		37,7	51	12,35	11,93		—0,33		
1334		33,4	52		13,49				
1335		39,8	58		11,59				
1336		37,1	38 0		13,19				
1337		31,8	1	11,72	13,19		1,56		
1338		35,0	2	11,72	11,87	12,37	0,24	0,65	
1339		36,4	9	11,73	13.00	13,14	1,32	1,41	
1340		34,9	12		13,50				
1341		32,6	21	11,74	12,62		0,97		
1342		30,2	29	10,23	9,90		—0,24		B_9
1343		35,7	31	10,61	10,23		—0,29		B_3
1344		35,9	40	11,59	12,63	13,16	1,13	1,57	
1345		37,5	47		13,01				
1346		33,4	48	12,66	12,63		0,06		
1347		39,7	53		12,63				
1348		36,8	39 2		13,51				
1349		37,5	4		13,32				
1350		37,9	5		13,52				
1351		33,2	6		13,52				
1352		38,2	9	12,38	11,96		—0,33		
1353		33,9	15	12.39	12,23	12,14	—0,07	—0,25	
1354		35,0	16	12,57	12,31	12,14	—0,17	—0,43	
1355		35,3	22	11,57	12,79		1,31		
1356		37,5	30	10,69	10 30		—0,30		
1357		34,1	32	11,60	13.13		—0,38		
1358		32,1	32	12,58	12,66	12,83	0,17	0,25	
1359		37,1	38	12,58	12,66		0,17		
1360		38,7	40 9	12,17	12,67	12,85	0,59	0,68	
1361		34,5	10		13,35				
1362		40,0	16		13,05				
1363		38,9	35	12,19	12,35	12,68	0,25	0,49	
1364		31,0	41 33		13,57				
1365		39,3	37	12,61	12,35		—0,17		
1366		31,7	48	12, 8	12,35	12,50	0,17	0,22	
1367		36,9	56	11,81	11,88	11,63	—0,04	—0,18	

ИВГНБ

ЭР01663

№№ п/п.	№№ B. D.	D	A	Фотовиз.	Фотогр.	Фиолет.	Фотовиз. С. I.	Фиол.-виз. С. I.	Спектры
1368		32,2	42 3	12,20	11,80		—0,31		
1369		31,4	3	11,82	12,71	13,28	0,98	1,46	
1370		34,9	5	9,29	10,61	11,69	1,31	2,40	K_5
1371		32,3	7		13,09				
1372		31,7	14	12,03	12,71		0,01		
1373		31,1	34		12,74				
1374		30,0	41	10,34	10,64	10,80	0,39	0,46	F_0
1375		32,5	46	11,85	12,06	12,59	0,30	0,74	
1376		36,5	46		13,62				
1377		45,3	22 54	12,66	12,74		0,17		
1378		48,7	56	12,24	12,74		0,59		
1379		48,0	58	10,34	11,36		1,11		K_0
1380		46,5	23 21	11,05	12,04		1,08		
1381		45,0	30	12,64	12,72		0,17		
1382		47,9	34		12,72				
1383		49,9	42	12,21	12,03		—0,09		
1384		40,3	53	11,80	12,01	12,48	0,30	0,68	
1385		42,0	24 13	12,60	12,68		0,17		
1386		43,9	41		13,57				
1387		48,7	25 40		12,64				
1388		41,3	40	11,75	11,62	11,57	—0,04	—0,18	
1389		48,5	57	10,61	10,89		0,36		F_0
1390		48,9	26 7	11,90	12,62		0,81		
1391	51 3072	48,2	52	8,30	8,07		—0,14		A_2
1392		47,3	53		12,99				
1393		44,3	53	12,53	12,99		0,55		
1394		44,0	27 18	12,34	12,60		0,35		
1395		46,2	29 9		13,45				
1396		45,3	12	10,89	12,95		2 15		
1397		40,4	13	11,04	13,45		2,50		
1398		46,2	19	11,51	11,55		0,13		
1399		43,5	25	12,32	12,95	13,07	0,82	0,85	
1400		43,6	37	12,22	12,57	12,70	0,44	0,48	
1401		40,2	41		12,94				
1402		40,7	44	11,73	11,54	11,46	—0,10	0,27	
1403		49,9	53		12,95				
1404		45,0	30 33		13,44				
1405		44,2	31 0	12,47	12,22		—0,18		
1406		45,5	18		13,44				
1407		41,0	19	11,49	13,43		2,03		
1408		44,1	37	9,79	11,53	12,90	1,83	3,11	
1409		40,5	37	11,65	11,87	11,96	0,31	0,31	
1410		40,1	44		12,93				
1411		44,1	53		12,35				
1412		43,8	32 11	12,46	12,35	12,28	—0,02	—0,18	
1413		47,4	14	11,66	12,94	13,06	1,37	1,42	

ЛВГБ

ЭР01663

№№ п/п.	№№ B. D.	D	A	Фотовиз.	Фотогр.	Фиолет.	Фотовиз. С. I.	Фиол.-виз. С. I.	Спектры
1414		43,3	21		12,94				
1415		44,1	26	12,46	13,43		1,06		
1416		46,2	32		12,55				
1417		48,7	39	11,82	12,56		0,83		
1418		46.9	43		13,44				
1419		42,1	50		13,43				
1420		46,1	54		13,44				
1421		41,2	58	12,12	12,93		0,90		
1422		48,3	33 18	11,66	12,56	12,69	0,99	1,03	
1423		49,7	28		12,56				
1424		45.9	30		12,94				
1425		42,1	41		12,94				
1426		48,7	48		12,56				
1427		49,9	48	11,90	13,44		1,61		
1428		50,0	34 8	12,27	12,57	13,07	0,39	0,80	
1429		45,7	8		12,56				
1430		40,2	9	11,10	11,02		0,01		
1431		45.7	18	12,46	12,56		0,19		
1432		40,9	21		12,56				
1433		49,6	29		13,45				
1434		46,3	30	11,49	11,54		0,13		
1435		42,0	37	10,87	10,82		0,04		
1436		46,4	38		13,44				
1437		43,4	41	12,46	12,10		—0,27		
1438		48,2	42		13,45				
1439		47,7	45		13,45				
1440		46,8	48		13,45				
1441		49,3	35 5		12,95				
1442		44,9	19		13,46				
1443		45,4	19	12,31	12,96	13,07	0,74	0,76	
1444		47,5	28	10,90	12,96		2,17		
1445		45,4	29	11,59	12,87	13,07	1,57	1,48	
1446		41,4	31	12,06	12,11		0,14		
1447		48,9	32	12,51	12,81	13,10	0,39	0,59	
1448		45,0	38		13,15				
1449		43,2	39	8,11	7,74		—0,28		A_5
1450		40,2	43	10,53	10,17		—0,27		A_5
1451		45.7	43	9.82	11,76	12,88	2,03	3,00	
1452		49,0	43		13,07				
1453		43,6	51	12,06	12,59		0,62		
1454		48,6	55		13,47				
1455		40,0	36 14		13,07				
1456		45,0	17	11,24	11,05		—0,10		
1457		47,1	23	12,51	12,13		—0,29		
1458		44,6	24	11,62	12,25		0,72		
1459		42,7	27	11,86	11,91	11,91	0,14	0,08	
1460		49,1	36		13,48				
1461		41,1	36		12,25				
1462		46,8	45		12,82				
1463		48,6	50		13,49				
1464		42,3	55		13,48				

РВГНБ

ЭР01663

№№ п/п.	№№ B. D.	D	A	Фотовиз.	Фотогр.	Фиолет.	Фотовиз. С. I.	Фиол.-виз. С. I.	Спектры
1465		45,2	37 8		12,99				
1466		41,4	13		13,49				
1467		46,1	19	11,64	11,23		—0,32		
1468		50,0	23	10,50	11,03	11,54	0,62	1,04	
1469		43,6	33	9,25	9,75	10,44	0,59	1,19	F_0
1470		41,2	33	11,56	12,61	13,13	1,14	1,57	
1471		41,1	36	12,35	11,93		—0,33		
1472		41,2	37	12,53	12,41		—0,03		
1473		41,2	40	12,53	12,27		—0,17		
1474		45,0	45		13,50				
1475		41,4	38 5	10,93	11,60	11,95	0,75	1,02	
1476		47,6	5		13,00				
1477		43,1	12	12,55	12,76	13,15	0,30	0,60	
1478		43,9	21		13,00				
1479		48,1	28	9,22	9,01		—0,12		A_3
1480		46,8	28		11,09				
1481		45,6	30	11,27	12,29		1,11		
1482		42,1	39	12,22	12,17		0,04		
1483		40,8	40		12,65				
1484		48,8	44	11,99	11,82	11,74	—0,08	—0,25	
1485		40,6	47	12,56	12,29		—0,18		
1486		46,4	47	12,56	12,30		—0,17		
1487		45,7	53	12,56	12,78	13,10	0,31	0,60	
1488		40,7	53		12,64				
1489		48,1	39 3	12,57	13,02		0,54		
1490		40,4	5	12,07	11,63		—0,35		
1491		47,0	9	10,71	10,40		—0,22		
1492		45,6	10	12,58	12,66		0,17		
1493		45,5	11	10,71	10,40		—0,22		
1494		42,0	21	9,91	10,26	10,65	0,44	0,74	F_2
1495		43,5	34	11,29	11,98	12,44	0,78	1,15	
1496		44,8	35		13,04				
1497		45,0	44		13,55				
1498		43,6	58		12,39				
1499		45,0	58		13,05				
1500		45,6	59	11,55	12,68		0,22		
1501		42,4	40 3		12,90				
1502		43,0	11		13,26				
1503		47,5	18		13,07				
1504		44,3	23	12,35	12,61	12,81	0,35	0,46	
1505		45,1	34	12,62	12,92	13,03	0,39	0,41	
1506		42,4	44		12,69				
1507		40,6	45		13,08				
1508		46,6	45		13,26				
1509		49,6	53	10,30	12,17	13,26	1,96	2,94	
1510		40,5	55		13,08				
1511		42,1	58		13,10				
1512		41,1	41 9		12,94				
1513		47,6	10	12,64	12,86	12,94	0,31	0,30	
1514		44,6	18		13,10				
1515		43,0	19		12,94				
1516		44,8	23		12,73				

ЛВГБ

ЭР01663

№№ п/п.	№№ B. D.	D	A	Фотовиз.	Фотогр.	Фиолет.	Фотовиз. С. I.	Фиол.-виз. С. I.	Спектры
1517		48,6	41	11,68	11,52		—0,07		
1518		56,6	23 6	10,71	10,55		—0,07		B_8
1519		55,2	30	10,90	10,59		—0,22		A_0
1520		54,7	41	9,77	9,50		—0,18		A_0
1521		57,2	42	11,67	12,26		0,68		
1522		51,5	44	11,49	12,71		1,31		
1523		52,8	24 12	12,43	12,84		0,50		
1524		52,0	25 5	11,37	11,84	12,04	0,56	0,67	
1525		59,9	17	11,15	11,83	12,06	0,77	0,91	
1526		59,6	21	11,45	11,76	12,04	0,30	0,59	
1527		51,9	26 34	11,35	11,53		0,37		
1528		50,9	40	11,59	11,61	11,94	0,11	0,35	
1529		55,4	27 52	11,35	12,99		1,73		
1530		52,1	52		13,49				
1531		52,8	56	12,53	12,99		0,55		
1532		54,9	28 0		12,99				
1533		55,7	20		13,28				
1534		54,9	21	12,10	13,28		1,27		
1535		50,3	34	11,07	12,59	13,10	1,61	2,03	
1536		58,0	36		12,68				
1537		52,4	47		12,73				
1538	51°3078	54,2	29 6	6,80	7,85		1,14		K_0
1539		51,6	9	12,33	12,25	12,24	0,01	—0,09	
1540		57,7	9		12,97				
1541		58,6	14	11,86	12,05	12,34	0,28	0,48	
1542		53,7	30	11,70	12,97		1,36		
1543		55,6	59	12,31	12,96		0,74		
1544		54,4	30 20	10,37	10,47	10,52	0,19		A_3
1545		50,4	20	11,84	12,12	12,32	0,37	0,48	
1546		58,0	26	12,49	12,96	13,08	0,56	0,59	
1547		57,0	31		13,45				
1548		59,9	45	10,90	12,44	12,52	1,63	1,62	
1549		57,4	59		13,05				
1550		53,6	31 8	12,31	11,75		—0,47		
1551		52,9	14	12,31	12,79	13,07	0,57	0,76	
1552		56,5	18	9,88	9,85		0,06		B_9
1553		56,4	32	11,66	11,89	12,32	0,32	0,66	
1554		32,9	32	12,04	12,14	12,29	0,19	0,25	
1555		59,3	42	11,50	12,57	13,06	1,16	1,56	
1556		35,9	44	12,46	12,56		0,19		
1557		59,3	59	9,94	10,17	10,51	0,32	0,57	F_2
1558		50,4	31 11	12,48	12,56		0,19		
1559		59,0	13	8,86	8,63		—0,14		B_9
1560		51,2	16	10,53	12,11	13,07	1,67	2,54	
1561		50,3	19	12,14	11,89		—0,16		
1562		56,9	21		12,78				

ЛВГНБ

ЭР01663

№№ п/п.	№№ B. D.	D	A	Фотовиз.	Фотогр.	Фиолет.	Фотовиз. C. I.	Фиол.-виз. C. I.	Спектры
1563		59,1	39	10,53	10,47		—0,03		
1564		58,0	56	11,43	11,67	12,04	0,33	0,51	
1565		51,4	59		12,94				
1566		55,6	33 4	12,06	13,45		1,48		
1567		52,7	7	9,13	9,15		0,11		A_0
1568		53,2	14	11,26	11,54		0,37		
1569		54,9	32		12,95				
1570		55,3	36		13,45				
1571		55,0	42	11,27	12,95		1,77		
1572		58,1	34 6	10,68	11,84	12,71	1,25	2,03	
1573		58,7	8	11,28	12,80	13,08	1,61	1,86	
1574		55,5	9	11,67	11,75	11,91	0,17	0,24	
1575		52,4	17	12,31	11,89		—0,33		
1576		54,8	23		12,97				
1577		51,5	31	12,48	12,57	12,70	0,18	0,22	
1578		50,5	34	12,30	12,71	13,07	0,50	0,77	
1579		57,3	47	11,29	13,47		2,27		
1580		55,5	35 3	12,50	12,59	13,09	0,18	0,59	
1581		55,0	14	12,24	11,91		—0,24		
1582		51,3	16	12,08	11,91		—0,08		
1583		51,5	19	12,50	12,25		—0,16		
1584		58,0	26	11,29	12,25		1,05		
1585		58,1	34	12,50	12,97		0,56		
1586		58,3	38	12,09	12,98		0,98		
1587		55,5	41	11,86	11,77		0,00		
1588		52,7	41		11,91				
1589		58,1	42	12,51	12,98		0,56		
1590		55,7	47	11,86	11,91		0,14		
1591		55,7	51	12,09	12,98		0,98		
1592		52,5	55	11,70	12,59	13,10	0,98	1,40	
1593		52,2	58	12,51	12.39		—0,03		
1594		50,9	36 7	11,55	12,81		1,35		
1595		59,5	14		12,83				
1596		58,3	28		13,29				
1597		57,8	30	12,53	12,47	12,37	0,03	—0,16	
1598		57,8	33	12,53	12,47	12,37	0,03	—0,16	
1599		56,3	38	12,53	12,27	12,37	0,03	—0,16	
1600		51,5	48	12,71	13,49		0,87		
1601		51,5	48	12,71	13,49		0,87		
1602		50,2	49	10,72	11,93	13,13	1,30	2,41	
1603		50,9	37 8	10,79	10,87		0,17		
1604		58,9	18		12,84				
1605		54,3	22		12,48				
1606		50,8	29	11,59	12,77		1,27		
1607		56,2	30	11,97	12,63		0,75		
1608		53,8	39	11,74	11,94	12,39	0,29	0,65	
1609		58,0	40	11,75	11,33		—0,33		
1610		57,5	40	11,20	11,41		0,30		
1611		54,7	43	11,59	12,29	13,02	0,79	1,43	
1612		53,8	47	12,39	11,95		—0,35		
1613		58,0	48	12,38	13,51		1,22		

ЭР01663

№№ п/п.	№№ B. D.	D	A	Фотовиз.	Фотогр.	Фиолет.	Фотовиз. С. I.	Фиол.-виз. С. I.	Спектры
1614		55,8	49	12,38	13,51		1,22		
1615		57,3	58	12,56	12,49	12,47	0,02	−0,09	
1616		59,0	38 2	9,76	11,26	12,42	1,59	2,56	
1617		53,2	11	11,60	13,02		1,51		
1618		51,7	18		12,86				
1619		59,4	19	10,62	12,10	13,04	1,57	2,42	
1620		53,2	23	12,57	12,18		−0,30		
1621		52,3	25	11,76	11,42		−0,25		
1622		55,0	28		12,78				
1623		53,4	36	11,76	12,64		0,97		
1624		59,8	37		12,65				
1625		55,7	51		13,53				
1626		57,2	39 1	11,93	11,44		−0,40		
1627		55,4	3	10,77	12,66	13,20	1,98	2,43	
1628		52,2	6		13,54				
1629		53,9	14		13,54				
1630		53,5	19	11,37	10,92		−0,36		
1631		54,3	24	12,25	12,33	12,46	0,17	0,21	
1632		54,7	25		13,05				
1633		54,1	26		13,05				
1634		56,0	29		13,06				
1635		54,7	29		13,06				
1636		53,6	31		13,06				
1637		58,0	34		12,68				
1638		58,3	35		12,69				
1639		54,5	41		11,67				
1640		54,6	42		11,67				
1641	51°3125	59,5	50	7,18	7,68		0,59		K_0
1642		56,4	56		12,91				
1643		56,9	58		12,91				
1644		56,9	40 4	11,40	11,16	11,06	−0,15	−0,34	
1645		54,3	5		12,92				
1646		59,3	18	10,67	10,61		0,03		B_8
1647		59,9	28		12,37				
1648		51,0	28		12,69				
1649		54,3	33	12,62	12,25		−0,28		
1650		55,7	36	12,36	12,71	12,89	0,44	0,53	
1651		56,0	52		12,72				
1652		50,3	41 3	11,44	11,34		−0,01		B_8
1653		50,1	5	12,47	12,04		−0,34		
1654		56,7	8		13,11				
1655		54,7	15		13,12				
1656		58,7	15		13,12				
1657		52,7	29	11,84	13,12		1,37		
				52°00					
1658		7,6	23 50	11,84	12,06	12,57	0,27	0,73	
1659		5,2	24 12	9,82	10,05		0,32		F_5
1660		0,9	15	13,60					
1661		4,3	25		13,19				
1662		0,7	25		13,59				
1663		4,9	30		13,59				

ЦВТНБ

ЭР01663

№№ п/п.	№№ B. D.	D	A	Фотовиз.	Фотогр.	Фиолет.	Фотовиз. C. I.	Фиол.-виз. C. I.	Спектры
1664		6,2	32		13,19				
1665		6,3	25 18	11,02	11,15		0,22		
1666		6,1	51	10,27	10,53		0,35		B_8
1667		3,5	53	12,59	12,81	13,22	0,31	0,63	
1668		8,0	26 10		13,24				
1669		3,8	26	12,15	12,65		0,59		
1670		7,7	32		13,24				
1671		4,3	45		13,53				
1672		1,0	49	9,89	10,79	10,92	0,99	1,03	K_0
1673		5,9	54	11,76	11,91		0,24		
1674		2,3	27 26		13,01				
1675		0,9	32		13,51				
1676		2,5	39	10,44	10,88		0,53		F_5
1677		6,8	57	10,95	11,24	11,56	0,37	0,58	
1678		8,0	28 13	11,66	11,60	11,56	0,03	—0,10	
1679		5,7	18		13,09				
1680		3,2	22	11,72	11,93	12,37	0,30	0,65	
1681		0,2	39		13,49				
1682		2,6	46		13,49				
1683		8,1	59		12,61				
1684		6,6	29 18	11,72	13,49		1,86		
1685		8,3	48		13,48				
1686		5,9	30 25	9,50	10,19	10,73	0,78	1,23	G_0
1687		1,3	41		12,96				
1688		8,2	55	11,92	13,28		1,45		
1689		9,6	55	10,78	10,40		—0,19		F_0
1690		8,4	31 27	12,33	12,45	12,96	0,24	0,63	
1691		5,7	28	9,36	9,37		0,10		B_0
1692		5,0	33	12,51	12,45	12,34	0,03	—0,17	
1693		8,2	36	11,70	11,49		—0,12		
1694		5,3	32 11		12,97				
1695		9,5	24		13,47				
1696		10,0	30		9,55				
1697		2,0	35	9,69	9,36		—0,24		B_3
1698	51°3096	0,7	37	8,51	8,32		—0,10		A_0
1699		5,3	39		13,47				
1700		4,1	33 6	10,11	11,91	12,97	1,89	2,88	
1701		3,7	7	12,08	12,97		0,98		
1702		7,8	7		13,17				
1703		6,1	15	9,98	10,49		0,60		
1704		5,9	18	12,51	12,59		0,17		
1705		6,1	20	20,56	12,59		2,12		
1706		7,6	31	10,96	12,59		1,72		
1707		3,3	31	12,50	13,46		1,05		
1708		1,9	37	11,53	11,42	11,36	—0,02	—0,17	
1709		1,5	45	11,69	12,58		0,98		
1710		7,0	47	10,91	10,84		0,02		

ЭР01663

№№ п/п.	№ № B. D	D	A	Фотовиз.	Фотогр.	Фиолет.	Фотовиз. С. I.	Фиол.-виз. С. I.	Спектры
1711		6,2	48	11,15	11,21		0,15		
1712		9,2	58	12,10	12,14	12,36	0,13	0,26	
1713		7,5	59		13,48				
1714		5,7	34 9	12,51	12,59	12,73	0,17	0,22	
1715		8,7	28		13,48				
1716		7,3	37	10,71	12,26		1,64		
1717		2,1	39	12,51	12,59	12,96	0,17	0,45	
1718		0,9	55	11,70	11,85		0,24		
1719		5,7	56	10,71	10,86		0,24		
1720		6,0	58		12,82				
1721		9,0	35 2		13,29				
1722		1,8	9	12,52	12,98		0,55		
1723		7,3	11		13,29				
1724		5,7	18		13,49				
1725		1,6	42	12,10	12,14		0,13		
1726		6,8	46	11,72	12,61		—0,02		
1727		0,2	51	12,53	12,99		0,55		
1728		1,1	55	11,72	12,83		1,20		
1729		7,9	36 0	11,11	11,24	11,39	0,22	0,28	
1730		3,7	3	12,53	12,99		0,55		
1731		3,9	9	12,53	12,99		0,55		
1732		2,7	16	12,53	12,99		0,55		
1733		1,4	35	10,94	11,93		1,08		
1734		1,5	35		11,93				
1735		5,0	47	12,56	13,51		1,04		
1736		5,7	53	12,14	12,49	12,79	0,44	0,65	
1737		4,3	55	12,56	12,63	12,79	0,16	0,23	
1738	51°3112	4,0	37 2	7,22	6,73		—0,40		A_0
1739		9,9	7		12,63				
1740		7,9	8		13,51				
1741		2,9	14	10,61	10,15	10,11	—0,37	—0,50	
1742		4,9	15		13,21				
1743		3,9	17	12,56	12,39		—0,18		
1744		5,5	23	12,38	12,29	12,48	—0,00	—0,10	
1745		9,6	27		13,52				
1746		4,3	29	12,56	12,30		—0,17		
1747		8,9	33		13,52				
1748		6,4	36	12,39	12,51	13,00	0,21	0,61	
1749		2,9	38 5		12,65				
1750		1,8	5		13,03				
1751		5,9	13	10,97	12,32	13,07	1,44	2,10	
1752		4,6	19		12,32				
1753		1,8	28		12,66				
1754		3,1	32	11,14	11,84	12,44	0,79	1,30	
1755		1,3	37		12,66				
1756		7,9	38	10,99	11,65	12,44	0,75	1,45	
1757		7,5	44	12,16	12,52	13,06	0,45	0,90	
1758		3,7	45	11,14	11,28		0,23		A_0
1759		3,8	46		11,28				
1760		1,8	49		12,67				

ЛВГБ

ЭР01663

№№ п/п.	№№ B. D.	D	A	Фотовиз.	Фотогр.	Фиолет.	Фотовиз С. I.	Фиол.-виз. С. I.	Спектры
1761		2,3	39 5	12,17	12,33		0,25		
1762		2,1	9	11,78	12,67		0,98		
1763		0,6	13	9,92	11,45	12,12	1,62	2,20	
1764		6,9	15	12,19	12,01		—0,09		
1765		0,7	20	12,33	12,33	12,44	0,09	0,11	
1766		5,3	27		11,87				
1767		3,2	33		12,01				
1768		7,9	35		12,02				
1769		9,6	39		12,62				
1770		6,8	42	12,04	12,02		0,07		
1771		7,9	43	10,09	9,98		—0,02		A_5
1772		1,8	54		12,70				
1773		4,8	59	10,89	10,97		0,17		
1774		9,0	40 13		13,60				
1775		7,1	14		13,60				
1776		2,1	18		12,72				
1777		5,7	22	11,83	11,35		—0,39		
1778		2,4	31		13,11				
1779		7,1	32	12,22	12,05		—0,08		
1780		1,8	53	12,64	12,73	12,93	0,18	0,29	
1781		6,6	54	11,45	11,01	10,90	—0,35	—0,55	
1782		0,6	56	12,64	12,73	13,16	0,18	0,52	
1783	51°3127	6,5	41 2	7,61	8,81	10,44	1,29		K_2
1784		4,3	3	11,21	11,58		0,46		
1785		0,9	5	12,23	12,40		0,26		
1786		0,6	7	12,29	12,40	13,33	1,20	2,04	
1787		12,8	24 32		13.11				
1788		19,9	48		12,73				
1789		15,9	55	12,22	12,72	13,30	0,59	1,08	
1790		18,3	59		13,11				
1791		15,8	25 5	12,22	12,72		0,59		
1792		16,8	56	11,64	12,01	12,21	0,46	0,57	
1793		12,6	26 0	11,79	11,86	12,07	0,16	0,28	
1794		15,0	5		13,56				
1795		11,1	27 36	11,27	12,64		1,46		
1796		14,9	51	12,14	11,96	11,90	—0,09	—0,24	
1797		13,1	28 18	12,30	12,29	12,26	0,08	—0,04	
1798		12,3	42	11,74	12,28	12,39	0,63	0,65	
1799		16,4	55	10,97	11,09	11,43	0,21	0,46	
1800		16,1	29 0	11,75	11,95	12,13	0,29	0,38	
1801		15,2	9	12,13	12,08		0,04		
1802		18,0	18	10,97	11,05	11,40	0,17	0,43	
1803		13,3	20	12,35	12,27	12,26	0,01	—0,09	
1804		20,0	28	11,05	11,47	11,57	0,51	0,52	
1805		10,8	28	10,58	11,93		1,44		
1806		11,1	55	12,14	11,95	11,87	—0,10	—0,27	
1807		12,1	55	12,35	12,57	13,13	0,31	0,78	

ЛВГНБ

№№ п/п.	№№ B. D.	D	A	Фотовиз.	Фотогр.	Фиолет.	Фотовиз. С. I.	Фиол.-виз. С. I.	Спектры
1808		16,6	30 1	12,72	12,99		0,37		
1809		11,2	14	12,19	12,27	12,00	0,10	—0,19	
1810		20,0	16		13,00				
1811		16,9	18		13,00				
1812		12,1	25	10,94	12,27	12,94	1,42	2,00	
1813		12,9	50	10,20	11,92	12,75	1,81	2,55	
1814		15,5	31 5	11,32	12,99		1,76		
1815		11,9	7	11,71	12,98		1,36		
1816		13,4	20	10,94	12,61		1,66		
1817		19,9	22	11,72	11,60		—0,03		
1818		16,9	23		13,49				
1819		15,8	25	12,53	12,99		0,55		
1820		10,5	37		12,82				
1821		17,8	59	11,17	12,27		1,19		
1822		10,4	32 22		11,91				
1823		18,3	24	11,09	12,99		1,99		
1824		18,3	37	10,58	11,23	12,02	0,74	1,44	
1825		19,9	39	11,34	11,24		—0,01		
1826		10,7	41	12,51	12,26	12,20	—0,16	—0,31	
1827		13,7	46	12,10	12,90		0,89		
1828		10,8	49		12,80				
1829		12,9	58	12,51	12,92		0,50		
1830		11,5	33 6	10,70	11,58	12,34	0,97	1,64	
1831		12,3	8	10,92	11,14	11,34	0,31	0,42	
1832		10,1	9		12,26				
1833		17,3	21		11,59				
1834		18,0	21		12,27				
1835		15,3	34		12,61				
1836		18,7	37	11,11	10,82		—0,20		
1837		18,3	44	10,96	11,04		0,01		
1838		12,0	54	10,77	10,86	11,09	0,18	0,32	
1839		11,5	56	11,31	11,58	11,70	0,36	0,39	
1840		14,4	34 13		12,61				
1841		10,1	14	10,56	11,58		0,11		
1842		16,4	28	11,47	11,93		0,55		
1843		18,1	44	12,73	12,62		—0,02		
1844		12,7	51	12,10	12,07		0,06		
1845		16,8	54	12,55	12,62	12,94	0,16	0,39	
1846		12,7	56	12,52	12,99		0,56		
1847		12,9	35 9	12,10	12,99		0,98		
1848		11,6	13		13,49				
1849		10,7	29		12,84				
1850		19,1	42	11,51	11,47		0,05		
1851		10,1	43	9,88	11,08	12,39	1,29	2,51	
1852		16,8	47	12,56	12,63	13,16	0,16	0,60	
1853		19,3	49	11,81	12,63	13,16	1,91	1,35	
1854		19,0	57	10,10	10,23	10,40	0,22	0,30	A_3
1855		13,2	59		11,09				A_3
1856		18,9	36 1	10,97	12,17		1,29		
1857		11,2	7	11,75	12,63		—0,03		

ЛВГЛБ

ЭР01663

№№ п/п.	№№ B. D.	D	A	Фотовиз.	Фотогр.	Фиолет.	Фотовиз. С. I.	Фиол.-виз. С. I.	Спектры
1858		16,6	10	10,97	11,26	11,74	0,38	0,77	
1859		13,8	18		12,63				
1860		19,3	28	11,76	11,97		0,30		
1861		14,4	32	12,15	12,65	13,16	0,60	1,01	
1862	51°3109	12,8	35	8,12	7,78		—0,25		A_0
1863		11,2	49	11,75	12,64		0,95		
1864		16,5	51	11,13	11,27	11,59	0,23	0,46	A_5
1865		14,5	59	10,62	10,55		0,02		B_8
1866		11,2	37 4	11,91	11,48		—0,34		
1867		15,5	8	10,97	10,56		—0,32		B_0
1868		13,3	26	11,14	12,20	12,83	1,15	1,69	
1869		13,1	27		12,20				
1870		10,1	35	12,57	12,19		0,47		
1871		14,6	37	11,77	11,64		—0,04		
1872		14,2	41	11,77	12,80		1,12		
1873		18,7	41	10,64	12,13	13,22	1,58	2,58	
1874		17,0	51	12,17	11,99		—0,09		
1875		18,4	58	12,78	12,68	12,61	—0,01	—0,17	
1876		19,0	59	10,28	10,28		0,09		G_5
1877		14,8	38 15	10,14	9,96		—0,09		B_3
1878		18,1	15	12,61	12,69	12,87	0,17	0,27	
1879		14,7	23		12,82				
1880		16,3	23		12,83				
1881		15,5	28	12,19	13,57		1,47		
1882		19,2	30	12,19	12,01		—0,09		
1883		10,2	32	12,60	12,68	13,09	0,17	0,49	
1884		11,0	40	12,60	12,68	13,09	0,17	0,49	
1885		12,6	55	12,19	12,91	13,24	0,81	1,05	
1886		11,2	56	12,61	12,35		—0,17		
1887		16,2	58	11,35	12,02	12,75	0,76	1,40	
1888		14,3	39 2		12,70				
1889		12,3	6		12,84				
1890		13,6	10		13,08				
1891		16,8	31		13,10				
1892		16,6	33	10,68	12,72		2,13		
1893		19,8	56	12,23	11,72		—0,42		
1894		20,0	40 0	12,48	12,06		—0,33		
1895		10,5	0	11,28	11,34	11,44	0,15	0,16	
1896		17,5	5		12,96				
1897		15,9	10	11,29	11,00		—0,20		F_0
1898		18 4	10		13,12				
1899		12,9	13	12,91	12,39		—0,43		
1900		15,9	16	10,78	11,10	11,46	0,31	0,68	F_0
1901		15,6	28	11,84	12,28		0,53		
1902		21,0	25 51	11,56	12,02		0,55		
1903		26,3	26 9	11,04	11,33		0,38		
1904		30,0	40	9,96	9,99	10,23	0,12	0,27	G_0
1905		18,3	49		12,71				
1906		27,1	57	11,96	12,36	12,48	0,49	0,52	

ДВГНБ

ЭР01663

№№ п/п.	№№ B. D.	D	A	Фотовиз.	Фотогр.	Фиолет.	Фотовиз. С. I.	Фиол.-виз. С. I.	Спектры
1907		25,7	27 0	10,87	12,91		2,13		
1908		27,3	23	10,87	12,35	13,34	1,57	2,47	
1909		25,3	52	11,78	12,21	12,96	0,52	1,18	
1910		22.8	28 1		13,54				
1911		26,0	10	12,61	12,69		0,17		
1912		22,2	18	12,58	12,66		0,17		
1913		20,1	18	12,58	12,66		0,17		
1914		24,0	39	11,21	11,27	11,38	0,15	0,17	A_0
1915		21,2	58		13,52				
1916		29,3	29 2	12,32	13,54		1,31		
1917		26,3	7	11,22	12,66		1,51		
1918		26,1	7	12,58	12,66		0,17		
1919	51°3079	20,0	16	6,45	6,39		0,03		K_0 и A_5
1920		20,7	17	10,17	10,23		0,15		A_2
1921		27,8	21	10,47	10,56		0,18		B_8
1922		27,2	26	10,37	10,53		0,25		F_0
1923		28,2	49		13,51				
1924		22,7	40		13,51				
1925		28,5	55		13,53				
1926	52°2963	27,7	30 5	8,50	8,52		0,11		A_0
1927		27,0	7	11,51	11,96	12,14	0,54	0,63	
1928		26,7	8	11,43	12,64		1,40		
1929		29,6	14	10,99	11,28	11,63	0,38	0,64	
1930		24,0	15		13,54				
1931		26,5	18	11,43	11,96	12,40	0,62	0,97	
1932		23,7	38	10,97	12,63		1,75		
1933		27,0	31 1	11,98	11,95		0,06		
1934		27,3	8		13,51				
1935		21,1	18		13,00				
1936		29,3	36	11,76	12,51	13,01	0,84	1,25	
1937		24,0	36	8,41	10,09		1,77		K_0
1938		26,4	42	10,24	9,95		−0,20		B_8
1939		26,7	53	12,30	13,01		0,80		
1940		20,7	32 6	12,62	12,99		0,46		
1941		25,3	17	11,75	12,63		0,97		
1942		22,1	48	11,67	11,61		0,03		
1943		27,2	50	12,56	13,01		0,54		
1944		26,5	50	11,75	12,63		0,97		
1945		22,7	51	11,75	11,61		−0,05		
1946		28,8	53		13,52				
1947		21,7	53	10,37	10,23	10,20	−0,05	−0.17	B_8
1948		27,3	57	10,24	10,23	10,20	0,08	−0,04	B_8
1949		22,5	33 9	12,14	11,95		−0,10		
1950		22,7	14	12,56	12,17		−0,30		
1951		24,4	21	12,15	12,17		0,12		
1952		22,2	31	12,15	12,65		0,59		
1953		25,0	41	11,49	11,95		0,45		
1954		26,2	42	11,67	12,64		1,06		
1955		22,3	43	11,34	11,04		−0,21		
1956		25,1	49	12,30	11,95		−0,26		

ЛВГБ

ЭР01663

№№ п/п.	№№ B. D.	D	A	Фотовиз.	Фотогр.	Фиолет.	Фотовиз. С. I.	Фиол.-виз. С. I.	Спектры
1957		29,8	51	10,82	10,53		—0,20		
1958		28,5	54	11,59	11,04		—0,46		
1959		24,0	54		12,63				
1960		22,1	58	10,10	10,09		0,08		A_0
1961		21,1	31 0	10,97	10,89		0,01		
1962		28,0	22	11,76	13,53		1,86		
1963		24,7	23	10,97	11,61		0,73		
1964		21,6	32	11,27	11,25		0,07		
1965		20,7	42	12,58	12,43		—0,04		
1966		27,7	46	12,1	11,98		—0,04		
1967		29,3	48		13,04				
1968		20,5	51	12,56	13,01		0,54		
1969		26,7	35 2	9,57	9,32		—0,16		B_0
1970		22,1	9	11,20	11,61		0,50		
1971		22,3	10		12,63				
1972		24,5	31	12,57	13,53		1,05		
1973		21,9	36 10	10,12	10,26		0,23		
1974		24,5	18	11,37	11,12	10,90	—0,16	—0,47	
1975		23,7	29	10,63	10,56		0,02		
1976		29,7	41	11,47	11,30		—0,08		
1977		20,3	46		12,66				
1978		20,3	51		12,66				
1979		29,6	56	12,61	12,69		0,17		
1980		27,2	37 5	12,43	12,00		—0,34		
1981		22,3	16		13,55				
1982		28,0	17	10,80	10,59	10,33	—0,12	—0,47	
1983		25,5	36		13,57				
1984		28,3	41	11,81	12,70		0,98		
1985		27,5	43	11,81	13,08		1,36		
1986		22,7	59		12,23				
1987		26,9	23	11,83	11,70	11,64	—0,04	—0,19	
1988		26,6	31	11,05	11,62		0,66		F_0
1989		23,5	33	11,81	12,37		0,65		
1990		23,6	34		12,37				
1991		26,0	54		12,73				
1992		20,2	38 0	12,46	12,04		—0,33		
1993		22,6	10		12,04				
1994		20,2	22	11,99	12,04	12,14	0,14	0,15	
1995		20,7	24	11,28	12,72		1,53		
1996		20,0	34	11,29	12,73		1,53		
1997		31,3	26 27	11,83	12,04	12,14	0,30	0,31	
1998		35,3	27 2	12,06	12,04		0,07		
1999		38,0	16	11,44	11,57	12,09	0,22	0,65	
2000		36,1	25	11,98	12,03		0,14		
2001		32,7	30		12,70				
2002		39,9	43	10,25	10,32	10,75	0,16	0,50	
2003	52°2953	39,1	43	7,17	7,02		—0,06		A_0
2004		34,8	46	10,30	11,32	11,54	1,11	1,24	

ДВГНБ

ЭР01663

№№ п/п.	№№ B. D.	D	A	Фотовиз.	Фотогр.	Фиолет.	Фотовиз. С. I.	Фиол.-виз. С. I.	Спектры
2005	52°2955	32,2	53	8,94	8,75		−0,10		A_0
2006		32,9	54	11,02	12,69		1,76		
2007		35,7	28 6	11,11	11,32	11,47	0,20	0,36	
2007¹	52°2957	40,7	11	6,52	6,30		−0,13		A_0
2008		35,3	20	12,44	12,66		0,31		
2009		31,3	22	10,41	12,00		1,68		
2010		32,7	41	9,59	10,28	10,69	0,78	1,10	G_0
2011		35,0	51	10,74	10,95	11,28	0,30	0,54	F_0
2012		34,3	29 0	11,79	12,00	12,47	0,30	0,68	
2013		30,1	58	12,40	13,04		0,73		
2014		36,7	59	12,42	12,54	12,86	0,21	0,44	
2015		33,3	30 0	11,78	11,99	12,42	0,30	0,64	
2016		32,7	7	8,96	8,72		−0,15		B_2
2017		38,0	26	11,79	12,14	12,72	0,44	0,93	
2018		32,1	31	12,00	12,66	12,83	0,75	0,83	
2019		32,3	31 6		13,54				
2020		38,9	20	11,39	11,52	11,89	0,22	0,50	
2021		38,5	22	11,79	12,00	12,47	0,30	0,68	
2022		37,0	23	11,94	11,65		−0,20		B_3
2023		36,7	27	10,64	10,24		−0,31		B_0
2024		37,5	41	12,41	12,67	13,19	0,35	0,78	
2025		37,5	42	12,59	13,05		0,55		
2026		38,5	32 13	10,27	12,21		2,03		
2027		38,5	14		12,30				
2028		31,5	45	12,39	12,31		0,01		
2029		31,7	52	11,38	12,33		0,04		
2030		31,9	58	11,61	11,50		−0,02		
2031		35,3	33 9	11,77	13,54		1,86		
2032		32,7	5		13,02				
2033		30,5	6		13,04				
2034		34,6	7		13,04				
2035		33,1	19		13,54				
2036		36,7	23		12,67				
2037		40,0	27	12,60	12,34		−0,17		
2038		30,1	27		11,97				
2039		32,2	27	8,95	8,72		−0,14		B_0
2040		39,9	29	11,79	12,68	13,23	0,98	1,44	
2041		38,3	38		12,68				
2042		31,2	41		13,54				
2043	52°2983	31,3	52	8,06	8,11		0,14		F_2
2044		33,7	34 0		13,04				
2045		37,7	5	10,84	12,21	12,81	1,46	1,97	
2046		31,7	5		13,04				
2047		33,5	9	12,16	11,98		−0,09		
2048		36,3	11	12,40	12,53	12,83	0,22	0,43	
2049		38,8	15	12,60	12,68	12,86	0,17	0,26	
2050		35,0	35	10,28	11,73	12,40	1,54	2,18	
2051		37,7	49	11,56	11,75	12,08	0,28	0,52	
2052		37,6	43	11,96	13,07		1,20		

ЦВТИБ

ЭР01663

№№ п/п.	№№ B. D.	D	A	Фотовиз.	Фотогр.	Фиолет.	Фотовиз. С. I.	Фиол.-виз. С. I.	Спектры
2053		31,5	45	12,40	12,32	12,27	0,01	—0,13	
2054		33,7	47	11,15	11,77	12,34	0,71	1,19	
2055		39,5	51	12,61	12,35		—0,17		
2056		38,7	53	12,56	12,43		—0,04		A_3
2057		37,8	35 5	12,16	11,98		—0,09		
2058		32,4	13	8,22	9,81		1,68		K_5
2059		31,2	14	11,00	10,81		—0,10		
2060		34,8	15	9,87	11,58	13,23	1,80	2,36	
2061		38,3	24	12,43	12,23		—0,11		
2062		34,0	28	10,27	10,27	10,25	0,09	—0,02	A_0
2063		36,7	58	10,87	10,59		—0,19		B_0
2064		30,1	36 5	11,78	12,67		0,98		
2065		39,2	23	12,45	12,71		0,35		
2066		30,7	28	11,95	13,57		1,70		
2067		38,7	32	12,21	13,59		1,47		
2068		34,7	35		13,07				
2069		31,5	38		13,57				
2070		38,3	44	12,45	13,59		1,23		
2071		36,7	37 11	10,83	11,35	11,71	0,61	0,88	
2072		36,8	14	11,84	12,05		0,28		
2073		40,0	15	12,23	12,05		—0,09		
2074		39,7	44	12,24	12,07		—0,08		
2075		35,0	44		13,11				
2076		38,7	56	12,24	12,07		—0,08		
2077		30,9	58	10,97	10,98	11,29	0,10	0,32	
2078		33,3	38 7	12,23	13,12		0,98		
2079		35,5	13	12,23	13,62		1,48		
2080		33,4	20		13,22				
2081		40,2	28 11	6,52	6,30		—0,13		A_0
2082		49,3	29 44		13,61				
2083		47,1	52	12,23	12,38	12,54	0,24	0,31	
2084		43,7	57	11,03	10,96		0,02		
2085		47,7	30 12	10,97	12,26		1,42		
2086		48,0	12	12,23	12,26	12,54	0,12	0,31	
2087		48,3	21	12,64	13,10		0,55		
2088		47,7	25	9,80	9,10		—0,11		A_0
2089		49,0	35	12,00	12,73		0,82		
2090		45,3	46	11,28	11,32		0,13		
2091		44,8	53	12,62	12,36		—0,17		
2092		44,5	31 5		13,08				
2093		41,3	15	12,61	13,07	13,24	0,55	0,63	
2094		44,5	17	11,97	13,08		1,20		
2095		42,2	33	12,63	13,07		1,13		
2096		49,5	39	11,43	11,70		0,36		
2097		44,3	52	10,71	12,35	13,16	1,73	2,45	
2098		47,0	32 13	11,65	11,68		0,12		
2099		48,4	18	11,02	12,23	13,24	1,30	2,22	

ЭР01663

№№ п/п.	№№ B. D.	D	A	Фотовиз	Фотогр.	Фиолет.	Фотовиз. С. I.	Фиол.-виз. С. I.	Спектры
2100		41,7	22	11,25	11,31	11,65	0,15	0,40	
2101		46,0	42	11,80	12,02	12,50	0,31	0,70	
2102		48,3	53	12,64	12,72		0,17		
2103		45,3	33 17		13,58				
2104		44,3	37	12,19	12,01	11,92	—0,09	—0,27	
2105		46,3	38	12,62	12,24		—0,39		
2106		44,3	59	11,81	12,02		0,30		
2107		42,0	34 3	11,25	10,95		—0,21		
2108		49,9	5	12,06	12,72		0,75		
2109		47,8	5	12,64	12,72		0,17		
2110		44,3	10	9,96	10,96	12,04	1,09	2,08	
2111		46,3	13	11,19	10,97		—0,13		
2112		47,9	19	11,06	10,86		—0,11		
2113		47,3	21	12,38	12,38	12,36	0,09	—0,02	
2114		49,3	29	12,64	12,39	12,28	—0,16	—0,36	
2115		48,3	30	12,06	12,64		0,67		
2116		49,8	32	12,64	12,39	12,28	—0,16	—0,36	
2117		47,9	36		12,72				
2118		47,7	39		12,38				
2119		45,2	42	11,43	10,97		—0,37		
2120		42,0	43	12,36	12,70		0,43		
2121		45,5	35 7		13,59				
2122		49,8	17	12,06	13,62		1,65		
2123		45,2	21	10,68	10,43		—0,16		B_0
2124		44,7	21		13,61				
2125		45,3	25		13,61				
2126		45,0	35	10,90	10,86		0,05		B_8
2127		47,1	37	10,70	12,06	13,33	1,45	2,63	
2128		44,1	43	9,17	10,00	11,13	0,92	1,96	K_0
2129		48,9	53		13,12				
2130		43,0	36 1		12,72				
2131		42,5	7	12,64	12,38	12,28	—0,17	—0,36	
2132		44,5	14		12,72				
2133		41,7	28		12,72				
2134		43,1	47	11,68	12,05	12,57	0,48	0,89	
2135		42,2	37 5		13,62				
2136		41,7	13		13,62				
2137		52,5	29 40	11,85	11,73		—0,02		
2138		54,3	31 34	12,23	12,28	12,57	0,14	0,34	
2139		52,5	32 9	10,19	10,48	10,78	0,38	0,59	F_2
2140		53,7	33 16	12,23	12,74		0,60		
2141		53,7	26		13,64				
2142		51,3	28	8,26	8,19		0,02		A_0
2143		52,8	35	12,48	12,75		0,36		
2144		52,2	41	9,77	10,00	10,13	0,32	0,36	A_0
2145		53,8	34 24	12,65	13,12		0,56		
2146		51,3	32	10,54	11,72	12,57	1,27	2,03	
2147		50,7	55	12,46	12,19		—0,18		

* № 503, тесная пара с расстоянием компонентов в 9″ 5 и величинами каждого в 9,3 фотогр. вел.

Примечание. Фотовизуальные колориндексы исправлены. За нуль пункт звезд спектрального класса A_0, который оказался равным — 0,09.

ЭР01663

ДВ ГОС. УНИВЕРСИТЕТ, УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ I, 1937
FAR EASTERN STATE UNIVERSITY, SCIENTIFIC STUDIES, VOL. I, 1937

С. П. Слугинов.

УРАВНЕНИЕ МОНЖА-АМПЕРА.

ÉQUATION DE MONGE-AMPÈRE.

Par S. P. Slouguinoff.

РЕПОЗИТОРИЙ ДВГУПС

В настоящей статье мы ставим себе главной целью рассмотреть уравнение Монжа-Ампера для того случая, когда оно допускает, так называемый, промежуточный интеграл (intégrale intermédiaire).

В вопросе интеграции этого уравнения мы по преимуществу применяем как метод самого Ампера, так и матричный метод, играющий в наше время столь видную роль. Последний метод фигурирует уже в статье Лягерра „Sur la méthode de Monge pour l'intégration des équations linéaires aux différences partielles du second ordre", но в несколько примитивной форме. Поэтому мы и усовершенствовали метод Лягерра при помощи современной теории матриц.

ПОЛУЧЕНИЕ УРАВНЕНИЯ МОНЖА-АМПЕРА ИЗ УРАВНЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОГО ИНТЕГРАЛА.

Рассмотрим уравнение в частных производных 1-го порядка вида

$$\Phi(u,v)=0 \qquad (1)$$

или же $v=f(u)$ (1′), где u и v суть некоторые функции от x,y,z,p,q, а Φ и f — знаки произвольных функций. Дифференцируя равенство (1′) по x и по y, находим:

$$\frac{\partial v}{\partial x}+p\frac{\partial v}{\partial z}+r\frac{\partial v}{\partial p}+s\frac{\partial v}{\partial q}=f'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+p\frac{\partial u}{\partial z}+r\frac{\partial u}{\partial p}+s\frac{\partial u}{\partial q}\right) \qquad (a),$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}+q\frac{\partial v}{\partial z}+s\frac{\partial v}{\partial p}+t\frac{\partial v}{\partial q}=f'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+q\frac{\partial u}{\partial z}+s\frac{\partial u}{\partial p}+t\frac{\partial u}{\partial q}\right) \qquad (b),$$

ЭР01663

где p,q,r,s,t суть известные параметры Монжа. Исключив произвольную функцию $f'(v)$ из уравнений (a) и (b), получим:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}+p\frac{\partial u}{\partial z}+r\frac{\partial u}{\partial p}+s\frac{\partial u}{\partial q}, & \frac{\partial u}{\partial y}+q\frac{\partial u}{\partial z}+s\frac{\partial u}{\partial p}+t\frac{\partial u}{\partial q} \\ \frac{\partial v}{\partial x}+p\frac{\partial v}{\partial z}+r\frac{\partial v}{\partial p}+s\frac{\partial v}{\partial q}, & \frac{\partial v}{\partial y}+q\frac{\partial v}{\partial z}+s\frac{\partial v}{\partial p}+t\frac{\partial v}{\partial q} \end{vmatrix}=0 \quad (2).$$

Уравнение (2) можно представить следующим образом:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}+q\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,z)}-p\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)}+t\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,q)}+s\left[\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,p)}-\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,q)}\right]-$$
$$-r\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,p)}+(ps-qr)\frac{\partial(u,v)}{\partial(z,p)}+(pt-qs)\frac{\partial(u,v)}{\partial(z,q)}+$$
$$+(rt-s^2)\frac{\partial(u,v)}{\partial(p,q)}=0 \quad (3),$$

где, например $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}$ и т. д.

После очевидных преобразований уравнение (3) примет такую окончательную форму:

$$Hr+2Ks+Lt+M+N(rt-s^2)=0 \quad (4);$$

величины H,K,L,M,N будут некоторыми функциями от x,y,z,p,q.

Равенство (4) и называется уравнением Монжа-Ампера, а соотношение (1′) есть промежуточный интеграл этого уравнения. Таким образом, задача интегрирования уравнения (4) приводится к задаче интегрирования уравнения (1′).

ПОНЯТИЕ О МНОГООБРАЗИЯХ И ХАРАКТЕРИСТИКАХ.

Многообразие.

Скажем теперь несколько слов о важнейших понятиях в теории интегрирования уравнений с частными производными. Такими понятиями являются многообразие и характеристика. Дадим определение первого понятия, следуя Д. Ф. Егорову („Уравнения с частными производными 2-го порядка по двум независимым переменным“, Уч. зап. Моск. унив., 1899 г.). Пусть

$$F(x,y,z,p,q)=0 \quad (c)$$

будет уравнение в частных производных 1-го порядка, причем имеет место также и уравнение

$$dz-pdx-qdy=0 \quad (d).$$

Систему значений x,y,z,p,q назовем элементом 1-го порядка, x,y,z,p,q — координатами этого элемента. В зависимости от числа произвольных независимых параметров, от которых могут зависеть координаты элемента, мы можем назвать такие совокупности элементов многообразиями элементов одного, двух и т. д. измерений. Таким образом, наше пространство относительно подобных элементов представляет собою многообразие пяти измерений. В уравнении (c) какую-нибудь одну координату можно выразить в функции четырех других, которые играют роль произвольных независимых параметров. Поэтому мы можем сказать, что уравнение (c) определяет некоторое многообразие элементов четырех измерений, которое обозначим через M_4. Итак, уравнение (c) выделяет из всего многооб-

ЭР01663

РЕПОЗИТОРИЙ ГГТУ им. П.О. Сухого

разия пяти измерений некоторое многообразие четырех измерений.

Что значит интегрировать уравнение (c) с точки зрения только что установленного понятия? Это значит — из всего многообразия M_4 выделить такие многообразия, для которых имеет место соотношение (d). Всякое многообразие элементов 1-го порядка, удовлетворяющее уравнениям (c) и (d), назовем интегральным многообразием уравнения (c). Все сказанное по отношению к уравнению (c) с незначительными изменениями можно повторить и по отношению к уравнению в частных производных 2-го порядка

$$F(x,y,z,p,q,r,s,t)=0 \qquad \text{(e)}.$$

Наряду с уравнением (e) имеют место и уравнения:

$$\left.\begin{aligned} dz-pdx-qdy&=0\\ dp-rdx-sdy&=0\\ dq-sdx-tdy&=0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(f)}.$$

В отличие от элемента (x,y,z,p,q) систему значений x,y,z,p,q,r,s,t назовем элементом 2-го порядка.

Уравнение (e) в этом случае определяет многообразие элементов 2-го порядка семи измерений M_7. Проинтегрировать уравнение (e) значит из всего многообразия M_7 выделить такие многообразия, для которых имеют место соотношения (f). Всякое многообразие элементов 2-го порядка, удовлетворяющее уравнениям (e) и (f), назовем интегральным многообразием уравнения (e). Введением в науку понятия многообразия мы обязаны Грассману и Риману, и в применении к теории интегрирования дифференциальных уравнений Гурса.

Характеристика.

Другое, основное в теории интегрирования дифференциальных уравнений, понятие — характеристика введено в науку Монжем. В настоящей статье мы только вкратце уясним сущность этого понятия. Понятие о характеристике в вопросе интегрирования дифференциального уравнения в частных производных 2-го порядка тесно связано с, так называемой, задачей Коши, которая ставится таким образом: найти интегральную поверхность уравнения (e), проходящую через данную кривую C (плоскую или двоякой кривизны) и касающуюся вдоль этой кривой данной развертывающейся поверхности D. Задача Коши, вообще говоря, возможна и определенна. Но в том случае, когда получаются характеристики, задача Коши становится неопределенной. Найдем теперь уравнения характеристик для некоторых форм дифференциальных уравнений 2-го порядка.

I. Возьмем уравнение

$$Ar+2Bs+Ct-f(x,y,z,p,q)=0 \qquad \text{(g)},$$

где x,y,z,p,q суть функции параметра u и A,B,C — функции x,y. Присоединим к уравнению (g) еще такие:

$$\left.\begin{aligned} rdx+sdy-dp&=0\\ sdx+tdy-dq&=0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(h)}.$$

Система этих уравнений доставляет определенные значения для r,s и t, если детерминант

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & 2B & C\\ dx & dy & 0\\ 0 & dx & dy \end{vmatrix}=Ady^2-2Bdxdy+Cdx^2 \qquad \text{(l)}$$

ЭР01663

отличен от нуля. Если же имеет место равенство

$$\Delta = Ady^2 - 2Bdxdy + Cdx^2 = 0 \qquad \text{(i)},$$

то система уравнений (g) и (h) неопределенна или несовместна.

Как мы видим, уравнение (j) есть обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка и второй степени; оно определяет два семейства, так называемых, характеристических кривых дифференциального уравнения (g). Заметим, что уравнение (j) доставляет нам хорошее средство для классификации уравнений вида (g). Если дискриминант уравнения (j), т. е. выражение $B^2 - AC$ больше нуля, то уравнение принадлежит к гиперболическому типу. $B^2 - AC < 0$, то уравнение (g) называется эллиптическим (характеристики будут мнимые). Наконец, если $B^2 - AC = 0$, уравнение (g) называется параболическим (характеристики сливаются).

II. Детерминант вида (j) появится и при вычислении производных 3-го порядка, которые обозначим через $p_{30}, p_{21}, p_{12}, p_{03}$, где $p_{ik} = \dfrac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k}$.

В этом случае параметры r, s, t в уравнении (e) предполагаются уже вычисленными в функции от u. Дифференцируя уравнение (e) по x и по y, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} p + \frac{\partial F}{\partial p} r + \frac{\partial F}{\partial q} s + \frac{\partial F}{\partial r} p_{30} + \frac{\partial F}{\partial s} p_{21} + \frac{\partial F}{\partial t} p_{12} = 0 \\ &\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} q + \frac{\partial F}{\partial p} s + \frac{\partial F}{\partial q} t + \frac{\partial F}{\partial r} p_{21} + \frac{\partial F}{\partial s} p_{12} + \frac{\partial F}{\partial t} p_{03} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(k)}.$$

Сюда можно присоединить еще такие уравнения:

$$dr = p_{30}dx + p_{21}dy, \quad ds = p_{21}dx + p_{12}dy, \quad dt = p_{12}dx + p_{03}dy \qquad \text{(l)}.$$

Величины p_{30}, p_{21}, p_{12} и p_{03} можно определить или из уравнений 1, 3, 4 и 5-го системы уравнений (k) и (l), или же из 2, 3, 4 и 5-го уравнений этой системы. Для конечности и определения величин p_{30}, p_{21}, p_{12} и p_{03} необходимо, чтобы, по крайней мере, один из детерминантов

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} R & S & T & 0 \\ dxdy & 0 & 0 & \\ 0 & dxdy & 0 & \\ 0 & 0 & dxdy & \end{vmatrix} = (Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2)dy \qquad \text{(m)}$$

и

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & R & S & T \\ dxdy & 0 & 0 & \\ 0 & dxdy & 0 & \\ 0 & 0 & dxdy & \end{vmatrix} = -(Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2)dx \qquad \text{(n)},$$

где $R = \dfrac{\partial F}{\partial r}$, $S = \dfrac{\partial F}{\partial s}$, $T = \dfrac{\partial F}{\partial t}$, был отличен от нуля. Если же система уравнений (k) и (l) несовместна или неопределенна, то

$$Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2 = 0 \qquad \text{(o)}.$$

Но

$$Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2 = \begin{vmatrix} R & S & T \\ dxdy & 0 & \\ 0 & dxdy & \end{vmatrix} \qquad \text{(o')},$$

т. е. получили детерминант вида (j). Подобным образом мы могли бы поступать и далее, обращаясь к высшим производным, но мы не останавливаемся на этом в нашей статье.

ЭР01663

III. Рассмотрим, наконец, характеристики уравнения Монжа-Ампера. Имеем систему уравнений

$$Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0 \quad (4),$$

$$dp = rdx + sdy, \quad dq = sdx + tdy \quad (5).$$

Будем принимать, как это делает Гурса, x,y,z,p,q,dx,dy,dp,dq за данные константы, а r,s,t за прямоугольные координаты точки. При наших условиях уравнения (5) представляют некоторую прямую l. Ее параллель, проведенная через начало координат, есть

$$rdx + sdy = 0, \quad sdx + tdy = 0 \quad (p).$$

Последняя прямая описывает конус

$$rt - s^2 = 0 \quad (q).$$

Уравнение же (4) представляет поверхность 2-го порядка S, для которой конус (q) является управляющим конусом. При анализе уравнения (4) могут представиться следующие случаи:

1. Прямая l встречает поверхность S в единственной точке на конечном расстоянии. Уравнения (4) и (5) допускают единственную систему решений для r,t,s. Проблема Коши имеет только одно решение.

2. Если прямая l не встречает поверхности S ни в какой точке на конечном расстоянии, то задача Коши не имеет голоморфного решения.

3. Прямая l целиком расположена на поверхности S, так что уравнения (4) и (5) имеют бесконечность решений по отношению r,s,t. В этом случае существует, так называемое, характеристическое многообразие или, проще говоря, характеристики.

Для нахождения уравнения характеристик умножим уравнение (4) на N и перепишем полученное равенство таким образом:

$$(Nr + L)(Nt + H) - N^2s^2 + 2KNs + MN - HL = 0 \quad (6).$$

Равенству (6) можно придать такую форму:

$$(Nr + L)(Nt + H) - (Ns + \varphi)(Ns + \varphi_1) = 0 \quad (7),$$

где φ и φ_1 суть функции от x,y,z,p,q. Эти функции являются корнями квадратного уравнения

$$\lambda^2 + 2K\lambda + HL - MN = 0 \quad (7').$$

Уравнение (7) доставляет нам две системы прямолинейных образующих поверхности S. Все эти образующие получатся, если мы будем придавать параметру μ всевозможные значения в одной из систем уравнений

$$\left.\begin{aligned} Nr + L &= \mu(Ns + \varphi) \\ Nt + H &= \frac{1}{\mu}(Ns + \varphi_1) \end{aligned}\right\} \quad (8) \text{ или } \left.\begin{aligned} Nr + L &= \mu(Ns + \varphi_1) \\ Nt + H &= \frac{1}{\mu}(Ns + \varphi) \end{aligned}\right\} \quad (9).$$

Условия того, что прямая, заданная уравнениями (5), принадлежит к системе (8) или (9), будут таковы:

$$\frac{dx}{N} = \frac{dy}{-\mu N} = \frac{dp}{\mu\varphi - L} = \frac{dq}{\mu H - \varphi_1} \quad (10) \text{ и}$$

$$\frac{dx}{N} = \frac{dy}{-\mu N} = \frac{dp}{\mu\varphi_1 - L} = \frac{dq}{\mu H - \varphi} \quad (11).$$

Исключив μ из уравнений (10) и (11), мы получим две системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} Ndp + Ldx + \varphi dy &= 0 \\ Ndq + \varphi_1 dx + Hdy &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (10') \text{ и}$$

ЭР01663

$$\left.\begin{aligned} N dp + L\,dx + \varphi_1 dy = 0 \\ N dq + \varphi dx + H dy = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (11')$$

Эти соотношения вместе с уравнением $dz = p\,dx + q\,dy$, присоединенным и к системе (10'), и к системе (11'), доставят нам характеристики уравнения Монжа-Ампера. Хотя метод характеристик и является могучим методом для интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных 2-го порядка, но мы оставим теперь его в стороне и приведем метод Ампера и матричный метод.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ МОНЖА-АМПЕРА

Метод Ампера.

Наша задача заключается в том, чтобы найти промежуточный интеграл, когда он существует. Чтобы решить вопрос, применим вместе с Ампером метод изменения переменных. Для этой цели заменим первоначальные независимые переменные x и y новыми x и α. Мы можем рассматривать y как функцию x и α и, следовательно, z, p, q будут также функциями от x и α. Поэтому получим следующие соотношения:

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = q\frac{\partial y}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial p}{\partial \alpha} = s\frac{\partial y}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial q}{\partial \alpha} = t\frac{\partial y}{\partial \alpha}, \qquad (12)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p + q\frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = r + s\frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = s + t\frac{\partial y}{\partial x} \qquad (13).$$

Кроме того, условия интегрируемости примут вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \alpha} &= \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial \alpha} - \frac{\partial q}{\partial \alpha}\frac{dy}{\partial x}, \\ \frac{\partial r}{\partial \alpha} &= \frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial \alpha} - \frac{\partial s}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial x}, \\ \frac{\partial s}{\partial \alpha} &= \frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial \alpha} - \frac{\partial t}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial x} \end{aligned}\right\} \qquad (14).$$

Из уравнений (12) и (13) находим, что

$$\left.\begin{aligned} t &= \frac{\dfrac{\partial q}{\partial \alpha}}{\dfrac{\partial y}{\partial \alpha}}, \\ s &= \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\dfrac{\partial q}{\partial \alpha}}{\dfrac{\partial y}{\partial \alpha}}, \\ r &= \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \frac{\dfrac{\partial q}{\partial \alpha}}{\dfrac{\partial y}{\partial \alpha}} \end{aligned}\right\} \qquad (15).$$

Отсюда $$rt - s^2 = -\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x}\right)\cdot\frac{\dfrac{\partial q}{\partial \alpha}}{\dfrac{\partial y}{\partial \alpha}} \qquad (16).$$

ЛВГНБ

ЭР01663

Результат подстановки только что найденных величин в уравнение (4) будет таков:

$$P+Q\frac{\frac{\partial q}{\partial \alpha}}{\frac{\partial y}{\partial \alpha}}=0 \qquad (17),$$

где
$$\left.\begin{aligned} P&=H\left(\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial x}\right)+2K\frac{\partial q}{\partial x}+M-N\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2,\\ Q&=H\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2-2K\frac{\partial y}{\partial x}+L+N\left(\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial x}\right)\end{aligned}\right\} \qquad (18).$$

Выберем теперь произвольную функцию $y=\zeta(x,\alpha)$ так, чтобы $Q=0$ (q), тогда, в силу уравнения (17), и $P=0$ (r).

Уравнения (18), к которым свелось интегрирование данного, первого порядка и второй степени могут быть преобразованы. Для этой цели в уравнении (q) заменим $\frac{\partial p}{\partial x}$ и $\frac{\partial q}{\partial x}$ их выражениями, взятыми из уравнений (13), тогда получим

$$Q=(H+Nt)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2-2(K-Ns)\frac{\partial y}{\partial x}+L+Nr=0 \qquad (18').$$

Решая последнее уравнение относительно $\frac{\partial y}{\partial x}$, будем иметь

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{K-Ns\pm\sqrt{(K-Ns)^2-(H+Nt)(L+Nr)}}{N+Nt} \qquad (s), \text{ или}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{K-Ns\pm\sqrt{K^2-HL-N[Hr+2Ks+Lt+N(rt-s^2)]}}{H+Nt} \qquad (s')$$

Полагая для краткости $G=K^2-HL+MN$ и принимая во внимание уравнение (4), придем к соотношению

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{K-Ns\pm\sqrt{G}}{H+Nt} \qquad (s'').$$

Это соотношение можно переписать так:

$$H\frac{\partial y}{\partial x}+N\left(s+t\frac{dy}{dx}\right)-K\mp\sqrt{G}=0 \qquad (s''').$$

Но, на основании 3-го из уравнений (13), соотношение (s''') окончательно примет форму

$$H\frac{\partial y}{\partial x}+N\frac{\partial q}{\partial x}-K\mp\sqrt{G}=0 \qquad (19).$$

Займемся теперь уравнением (r). Этому уравнению можно придать такой вид:

$$H\frac{\partial p}{\partial x}+\left(2K-H\frac{\partial y}{\partial x}-N\frac{\partial q}{\partial x}\right)\frac{\partial q}{\partial x}+M=0 \qquad (t).$$

Пользуясь уравнением (19), соотношение (t) представим следующим образом:

$$H\frac{\partial p}{\partial x}+(K\mp\sqrt{G})\frac{\partial q}{\partial x}+M=0 \qquad (20).$$

Соотношение (20) можно преобразовать и придать ему форму соотношения (19)-го. Для этой цели умножим сначала соотношение (20) на N. Имеем

ЭР01663

$$NH\frac{\partial p}{\partial x}+N(K\mp\sqrt{G})\frac{\partial q}{\partial x}+MN=0 \qquad (u).$$

Подставляя вместо $N\frac{\partial q}{\partial x}$ его выражение, взятое из соотношения (19)-го, в равенство (u), находим

$$NH\frac{\partial p}{\partial x}+\left(K\mp\sqrt{G}\right)\left(K\pm\sqrt{G}-H\frac{\partial y}{\partial x}\right)+MN=0 \qquad (u'),$$

или

$$NH\frac{\partial p}{\partial x}+K^2-G-H(K\mp\sqrt{G})\frac{\partial y}{\partial x}+MN=0 \qquad (u'').$$

Но, по предыдущему, $K^2-G=HL-MN$, а потому после легкого упрощения окончательно получим

$$N\frac{dp}{\partial x}+L-(K\mp\sqrt{G})\frac{\partial y}{\partial x}=0 \qquad (21).$$

Соотношениям (19) и (21) можно придать и такой вид:

$$\left.\begin{aligned}Hdy+Ndq-(K\pm\sqrt{G})dx=0\\ Ndp+Ldx-(K\mp\sqrt{G})dy=0\end{aligned}\right\} \qquad (22).$$

Сюда нужно также присоединить и равенство

$$dz-pdx-qdy=0 \qquad (v).$$

Легко видеть, что соотношения (22) представляют собою по форме найденные нами выше уравнения (10) и (11), т. е. уравнения характеристик.

Итак, задача интегрирования уравнения (4) приводится к интегрированию системы уравнений (22) и (v).

Промежуточный интеграл.

Будем говорить, что соотношение

$$F(x,y,z,p,q)=C \qquad (w)$$

представляет собою, так называемый, первый интеграл, например, уравнений

$$\left.\begin{aligned}Hdy+Ndq-(K+\sqrt{G})\,dx=0,\\ Ndp+Ldx-(K-\sqrt{G})\,dy=0,\\ dz-pdx-qdy=0\end{aligned}\right\} \qquad (22'),$$

если соотношение $dF=0$ есть следствие этих уравнений.

Когда это обстоятельство имеет место, то функция $F(x,y,z,p,q)$ сохраняет одно и то же значение вдоль некоторой характеристики этой системы; это значение будет изменяться при переходе от одной характеристики к другой.

Дифференцируя равенство (w), получим

$$dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz+\frac{\partial F}{\partial p}dp+\frac{\partial F}{\partial q}dq=0 \qquad (x).$$

Исключая из соотношения (x) дифференциалы dz, dp и dq при помощи уравнений (22) и (v), будем иметь

$$dF=\left(\frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{L}{N}\frac{\partial F}{\partial p}+\frac{K\pm\sqrt{G}}{N}\frac{\partial F}{\partial q}\right)dx+$$

$$+\left(\frac{\partial F}{\partial y}+q\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{H}{N}\frac{\partial F}{\partial q}+\frac{K\mp\sqrt{G}}{N}\frac{\partial F}{\partial p}\right)dy=0 \qquad (y).$$

ЭР01663

Уравнению (y) можно удовлетворить, полагая

$$\left.\begin{aligned} N\left(\frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial z}\right)-L\frac{\partial F}{\partial p}+\left(K\pm\sqrt{G}\right)\frac{\partial F}{\partial q}=0 \\ N\left(\frac{\partial F}{\partial y}+q\frac{\partial F}{\partial z}\right)+\left(K\mp\sqrt{G}\right)\frac{\partial F}{\partial p}-H\frac{\partial F}{\partial q}=0 \end{aligned}\right\} \quad (23).$$

Итак, вопрос интегрирования системы уравнений (22) и (v) приводится к вопросу интегрирования системы уравнений (23). Если одна из систем (23) допускает два различных интеграла u и v, то и $\varphi(u,v)=0$ будет интегралом этой системы уравнений, где φ есть знак произвольной функции. Все неособенные интегралы уравнения $\varphi(u,v)=0$...(z) будут также интегралами уравнения (14). Уравнение (z) можно написать и в явной форме, именно $v=\varphi(u)$ (z′).

Уравнения (z) и (z′) и представляют собою, так называемые, промежуточные интегралы. Если будем рассматривать две системы уравнений (23), то получим два промежуточных интеграла вида (z′). Некоторые авторы называют также промежуточным интегралом всякое уравнение 1-го порядка $F(x,y,z,p,q)=C$, все неособенные интегралы которого удовлетворяют уравнению (4).

ОСНОВЫ ТЕОРИИ МАТРИЦ.

Прежде чем применить матричный метод Лягерра к анализу уравнения Монжа-Ампера, мы изложим основы современной теории матриц.

Определение матрицы.

Понятие матрицы принадлежит английскому математику Кели. Будем называть матрицей систему mn элементов, расположенных в форме прямоугольника, который содержит m строк и n столбцов. Матрицу символически обозначают следующим образом:

$$\left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{matrix}\right\| \quad (A).$$

Вместо вертикальных черт для обозначения матрицы употребляют также круглые скобки, или даже фигурные. Матрица, у которой $m=n$, называется квадратной. В дальнейшем мы такими матрицами только и будем заниматься, но предварительно дадим еще понятие о ранге матрицы.

Ранг матрицы.

Из элементов матрицы (A) мы можем составлять определители (детерминанты) различных порядков от единицы до меньшего из чисел m и n. Расположение строк и столбцов этих определителей будет таково же, как в данной матрице. О каждом таком определителе говорят, что он взят из матрицы, или принадлежит матрице. Положим, что p будет число, не превосходящее меньшее из чисел m и n. Чтобы составить какой-либо определитель p-го порядка, находящийся в данной матрице, мы должны взять p^2 элементов матрицы, принадлежащих каким-нибудь p строкам и p столбцам.

ЭР01663

Будем называть рангом матрицы наибольший порядок определителя, отличного от нуля и принадлежащего этой матрице.

Число определителей, принадлежащих матрице.

Чтобы получить число всех детерминантов p-го порядка, принадлежащих данной матрице (A), где $m \leqslant n$ и $p \leqq m$, мы должны произвести всевозможные выборы по p строк и по p столбцов из матрицы. Число всех выборов 1-й категории будет C_m^p, а второй — C_n^p. Каждой комбинации строк будут соответствовать все комбинации столбцов. Следовательно, число всех детерминантов p-го порядка будет равно $C_m^p C_n^p$. Поэтому число всех детерминантов, принадлежащих данной матрице, выразится формулой:

$$N = C_m^1 C_n^1 + C_m^2 C_n^2 + \ldots + C_m^m C_n^m \qquad \text{(B)}.$$

Если теперь мы возьмем тождество

$$(x+1)^m (1+x)^n = (1+x)^{m+n} \qquad \text{(C)}$$

и, пользуясь формулой Ньютона, выполним в нем указанные действия, то через сравнение коэффициентов при x^m в левой и правой частях, получим:

$$N = C_{m+n}^m - 1 \qquad \text{(D)}.$$

Перейдем теперь к рассмотрению квадратных матриц, которые в последующем изложении будем называть просто матрицами.

Обозначения матриц и детерминантов.

Для обозначения матриц будем еще употреблять как большие латинские буквы, так и символы вида $\| a_{ik} \|$, где $i,k = 1,2,\ldots,n$.

Таким образом, квадратную матрицу порядка n можно представить так:

$$A = \| a_{ik} \| \qquad \text{(E)}.$$

Соответствующий этой матрице определитель порядка n будем обозначать через $D(A)$, или $|A|$, или же $|a_{ik}|$.

Определение нуля.

Матрица A называется нулевой и обозначается символом 0, когда все ее элементы равны нулю.

Определение равенства двух матриц.

Две матрицы считаются равными, если все их элементы соответственно равны между собой.

ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ.

Сложение (вычитание).

Сложение (вычитание) матриц может быть выражено следующей формулой:

$$A \pm B = \| a_{ik} \| \pm \| b_{ik} \| = \| a_{ik} \pm b_{ik} \| \qquad \text{(F)},$$

где $i,k = 1,2,\ldots,n$.

Для операций сложения и вычитания матриц имеют место законы коммутативности и ассоциативности. С точки зрения теории групп можно сказать, что матрицы по отношению к сложению представ-

ЭР01663

ляют абелеву группу. Единицей группы служит матрица, равная нулю. Обратным элементом группы по отношению к матрице $A = \| a_{ik} \|$ является матрица

$$-A = -\| a_{ik} \| = \| -a_{ik} \| .$$

Для отличия матриц от обыкновенных алгебраических количеств (вещественных и обыкновенных комплексных количеств) будем называть эти последние скалярными величинами.

Умножение матрицы на скалярную величину.

Положим, что a и b будут скалярные величины, а A и B матрицы, тогда, очевидно, имеют место соотношения

$$\left.\begin{aligned} aA = Aa &= \| aa_{ik} \| , \\ a(A+B) &= aA + bB, \\ aA + bB &= (a+b)A \end{aligned}\right\} \qquad \text{(G).}$$

Итак, все законы обыкновенной алгебры (коммутативность, ассоциативность и дистрибутивность) имеют место для только что перечисленных операций.

Покажем теперь, какую важную роль играет теория линейных преобразований в установлении действий над матрицами и даже в уяснении самих матричных понятий.

Обратная матрица.

Пусть линейное преобразование определяется следующей системой уравнений:

$$x_i^1 = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \quad (i = 1,2,\ldots,n) \qquad \text{(H).}$$

Решая эту систему относительно x_k, получим обратную к (H) линейную подстановку, т. е.

$$x_k = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^{n} A_{ik} x_i^1 \quad (k = 1,2,\ldots,n) \qquad \text{(I),}$$

причем $D = | a_{ik} | \neq 0$ и A_{ik} — алгебраические дополнения элементов a_{ik} в детерминанте D.

Матрицы, соответствующие нашим преобразованиям, имеют следующие выражения:

$$A = \| a_{ik} \| \quad (H') \text{ и}$$

$$A^{-1} = \left\| \begin{matrix} \frac{A_{11}}{D} & \frac{A_{21}}{D} & \cdots & \frac{A_{n1}}{D} \\ \frac{A_{12}}{D} & \frac{A_{22}}{D} & \cdots & \frac{A_{n2}}{D} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{A_{1n}}{D} & \frac{A_{2n}}{D} & \cdots & \frac{A_{nn}}{D} \end{matrix} \right\| \qquad \text{(I') или короче} \qquad A^{-1} = \left\| \frac{A_{ki}}{D} \right\| \qquad \text{(I'')}$$

Из теории детерминантов известно, что значение взаимного детерминанта будет таково:
$| A_{ik} | = D^{n-1}$. Поэтому из формулы (I') следует

$$\left| A^{-1} \right| = \frac{1}{D} = |A|^{-1}.$$

ЭР01663

Умножение матриц.

Воспользуемся еще теорией линейных преобразований при установлении важнейшего действия умножения матриц. Даны два линейных преобразования:

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k \qquad (24), \text{ или короче } y = A(x) \qquad (24')$$

$$z_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}y_k \qquad (25), \text{ или } z = B(y) \qquad (25').$$

Выражая при помощи формул (24) и (25) величины z через x, найдем:

$$z_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}x_k \qquad (26), \text{ или } z = C(x) = BA(x) \qquad (26').$$

Символическое равенство (26′) показывает, что два линейных преобразования (24′) и (25′) заменились одним, которое называется произведением преобразований B и A. Коэффициенты c_{ik} с коэффициентами первых двух преобразований связаны зависимостями вида

$$c_{ik} = \sum_{p=1}^{n} b_{ip}a_{pk} \qquad (27).$$

Составляя матрицы, соответствующие всем трем линейным преобразованиям, мы, на основании соотношения (27), устанавливаем следующую формулу:

$$\| b_{ik} \| \cdot \| a_{ik} \| = \| c_{ik} \| \qquad (28), \text{ или короче } BA = C \qquad (28').$$

формула (28) или (28′) представляет собою произведение или композицию двух матриц. Ввиду важности этой формулы постараемся дать ей словесное определение:

под произведением BA двух матриц B и A мы разумеем такую новую матрицу C, где член c_{ik}, стоящий на пересечении i-ой строки с k-ым столбцом, получается при помощи составления суммы произведений членов i-й строки матрицы B на соответствующие члены k-го столбца матрицы A.

Закон составления элементов матрицы C, доставляемый формулой (27), тот же, что и при умножении детерминантов: умножение строк на столбцы. Но в то время как в теории детерминантов существует 4 способа умножения, в теории матриц имеет место только один указанный способ умножения, п. ч. в матрице, вообще говоря, мы не имеем права заменять строки столбцами и наоборот. Умножение матриц подчиняется законам ассоциативности и дистрибутивности, но, вообще говоря, не подчиняется закону коммутативности, т. е.

$$AB \neq BA \qquad (29).$$

КЛАССИФИКАЦИЯ НЕКОТОРЫХ МАТРИЦ.

Особенная матрица.

Матрица A называется особенной, если $|A| = 0$; в противном же случае она называется неособенной. Кроме вышеуказанных 3-х законов (коммутативности, ассоциативности и дистрибу-

ЭР01663

тивности), в алгебре имеет место еще один закон, согласно которому произведение двух или нескольких факторов только тогда равно нулю, когда, по крайней мере, один фактор равен нулю. В теории же матриц последний закон не имеет места. Для простоты рассуждения докажем это утверждение с помощью общих матриц второго порядка. Имеем

$$\begin{Vmatrix} a_1,b_1 \\ a_2,b_2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} c_1,d_1 \\ c_2,d_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_1c_1+b_1c_2, a_1d_1+b_1d_2 \\ a_2c_1+b_2c_2, a_2d_1+b_2d_2 \end{Vmatrix} \quad (J).$$

Чтобы правая часть последнего равенства обращалась в нуль, необходимо соблюдение следующих условий:

$$a_1c_1+b_1c_2=0,\ a_2c_1+b_2c_2=0,\ a_1d_1+b_1d_2=0,\ a_2d_1+b_2d_3=0 \quad (K).$$

Из условий (K) выводим:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=-\frac{c_2}{c_1}=-\frac{d_2}{d_1} \quad (L).$$

Обозначив отношение $\frac{a_1}{b_1}$ через k, будем иметь:

$$a_1=kb_1,\ a_2=kb_2,\ c_2=-kc_1,\ d_2=-kd_1 \quad (L').$$

Легко видеть, что

$$\begin{Vmatrix} b_1k,b_1 \\ b_2k,b_2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} c_1, & d_1 \\ -kc_1, & -kd_1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \quad (M).$$

Соотношение (M) показывает, что произведение двух матриц равно нулю, между тем как ни одна из них не равна нулю. Обе матрицы будут особенные, так как каждый из детерминантов, соответствующих этим матрицам, равен нулю. Будем теперь называть матрицу A делителем нуля, если можно найти такую, отличную от нуля, матрицу B, что либо $AB=0$, либо $BA=0$. Уже из нашего предыдущего доказательства видно, что делителем нуля может быть только особенная матрица.

Диагональная матрица.

Матрица, все элементы которой, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется диагональной. Эта матрица изображается символом

$A=[a_1,a_2,\ldots,a_n]$ (N), где $a_1,a_2,\ldots,a_n$ суть соответственные элементы главной диагонали. Диагональной матрице A, характеризуемой равенством (N), соответствует линейное пр образование вида

$$y_i=kx_i\ (i=1,2,\ldots,n).$$

Простейший случай диагональной матрицы представляет, так называемая, единичная матрица:

$$E=\|e_{ik}\|=\begin{Vmatrix} 1\ 0\ .\ .\ .\ 0 \\ 0\ 1\ .\ .\ .\ 0 \\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ 0\ 0\ .\ .\ .\ 1 \end{Vmatrix} \quad (O).$$

Этой матрице соответствует тождественное линейное преобразование $y_i=x_i\ (i=1,2,\ldots,n)$. Единичная матрица перестановочна с любой матрицей.

Другим частным случаем диагональной матрицы является скалярная матрица, т. е. матрица вида

ЭР01663

$$\begin{Vmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a \end{Vmatrix} = aE \qquad (P).$$

Скалярная матрица, подобно единичной, перестановочна с любой матрицей.

Некоторые свойства единичной матрицы.

Мы только что указали некоторые свойства единичной матрицы. Перечислим еще ряд свойств этой матрицы, так как она играет важную роль в теории матриц. Умножая, например, обратную матрицу $A^{-1} = \left\| \frac{A_{ki}}{D} \right\|$ на начальную A, получим

$$A^{-1} \cdot A = \begin{Vmatrix} \frac{D}{D} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{D}{D} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{D}{D} \end{Vmatrix} = E \qquad (Q).$$

С другой стороны можно принять, что

$$A^{-1}A = AA^{-1} = A^0, \text{ т. е. } A^0 = E \qquad (Q'),$$

Квадратные матрицы по отношению к умножению представляют группу, вообще говоря, неабелеву. Итак, обратным элементом группы является A^{-1}.

Докажем теперь, что в только что названной группе существует одна единица (правая и левая), именно E. В самом деле, допустим, что существует еще одна правая единица E_1, тогда, на основании равенства

$$AE = EA = A \qquad (R),$$

имеем, что

$$EE_1 = E_1 \qquad (R').$$

Кроме того,

$$AE_1 = A \qquad (R'').$$

Умножая обе части последнего соотношения слева на A^{-1}, находим:

$$A^{-1}AE_1 = A^{-1}A \text{ или } EE_1 = E \qquad (R''').$$

Сличая равенство (R′) с (R‴), мы видим, что $E_1 = E$.

Совершенно так же доказывается, что и левая единица будет единственная, именно E.

ТРАНСПОНИРОВАННАЯ МАТРИЦА И ЕЕ СВОЙСТВА

Матрица, которая получается из начальной A заменою строк столбцами или же наоборот, называется транспонированною (сопряженною) и обозначается символом A^1, так что $A^1 = \| a_{ki} \|$.

Если матрица A равна своей транспонированной, то она называется симметрической, т. е. $A = A^1$, причем $a_{ik} = a_{ki}$. Если же

ЭР01663

$A = -A^1$, причем $a_{ik} = -a_{ki}$, то матрица называется антисимметрической или косой симметрической.

Перечислим теперь следующие свойства транспонированной матрицы:

1. $\|A^1\|^1 = A$; 2. $|A^1| = |A|$; 3. $\|pA + qB\|^1 = pA^1 + qB^1$; 4. $\|AB\|^1 = B^1A^1$.

Доказательство свойства 3-го. Имеем

$$(\|pa_{ik}\| + \|qb_{ik}\|)^1 = (\|pa_{ik} + qb_{ik}\|)^1 = \|pa_{ki} + qb_{ki}\| = \|pa_{ki}\| + \|qb_{ki}\|.$$

Доказательство свойства 4-го. Положим, что

$$A = \|a_{ik}\|, B = \|b_{ik}\|, AB = C = \|c_{ik}\|, \text{ где } c_{ik} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip}b_{pk}.$$

$$\text{Но } A^1 = \|a_{ki}\|, B^1 = \|b_{ki}\|, C^1 = \|c_{ki}\|, \text{ где } c_{ki} = \sum_{p=1}^{n} b_{pk}a_{pi}.$$

Поэтому предложение доказано.

Докажем теперь справедливость этого предложения и в общем случае. Если наша теорема имеет место для $n-1$ матриц, то надо доказать, что она будет справедлива и для n матриц.

Пусть $B = A_2A_3 \dots A_n$. Согласно допущению, $B^1 = (A_2A_3 \dots A_n)^1 = A_n^1 \dots A_3^1A_2^1$. Следовательно, $(A_1A_2 \dots A_n)^1 = (A_1B)^1 = B^1A_1^1 = A_n^1 \dots A_2^1A_1^1$, что и требовалось доказать.

Последнюю теорему можно сформулировать таким образом: Матрица, транспонированная с произведением нескольких матриц, равняется произведению транспонированных с ними матриц, но написанных в обратном порядке.

Деление матриц.

То обстоятельство, что умножение матриц, вообще говоря, некоммутативно, приводит нас к рассмотрению двух типов деления. Даны две матрицы A и B, требуется найти третью матрицу такую, чтобы или $AX = B$ (30) или $YA = B$ (31), где $|A| \neq 0$.

Если умножим обе части уравнения (30)-го слева на A^{-1}, то получим

$$A^{-1}AX = A^{-1}B, EX = A^{-1}B, X = A^{-1}B \qquad (32).$$

Величину $A^{-1}B$ можно назвать отношением матриц A и B первого рода. Решая аналогичным образом уравнение (31), найдем, что $Y = BA^{-1}$ (33). Величину BA^{-1} можно назвать отношением матриц A и B второго рода. Нетрудно доказать, что каждое из уравнений (30) или (31) имеет только одно решение. Предварительно докажем следующее предложение: если $AB = 0$ и $|A| \neq 0$, то $B = 0$.

Для простоты рассуждения возьмем матрицы второго порядка. Имеем

$$\begin{Vmatrix} a_1b_1 \\ a_2b_2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} c_1d_1 \\ c_2d_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_1c_1 + b_1c_2, a_1d_1 + b_1d_2 \\ a_2c_1 + b_2c_2, a_2d_1 + b_2d_2 \end{Vmatrix}. \text{ По условию,}$$

$$\left.\begin{aligned} a_1c_1 + b_1c_2 = 0 \\ a_2c_1 + b_2c_2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (S), \quad \left.\begin{aligned} a_1d_1 + b_1d_2 = 0 \\ a_2d_1 + b_2d_2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (S')$$

ЭР01663

Мы получили две системы однородных уравнений.

Согласно второму условию, детерминант каждой системы отличен от нуля; поэтому каждая система имеет единственное решение $c_1 = c_2 = 0$ и $d_1 = d_2 = 0$. Следовательно, $B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} = 0$, т. е. теорема доказана. Совершенно аналогично теорема доказывается и в общем случае для матриц n-го порядка.

Следствие: Если $|A| \neq 0$, то из $AB = AC$ или $BA = CA$ следует $B = C$.

В самом деле, если $AB = AC$, то $A(B - C) = 0$, а потому $B - C = 0$, т. е. $B = C$. Доказательство 2-ой части предложения совершенно аналогично. Теперь уже легко доказать, что уравнение $AX = B$ имеет единственное решение. Допустим, что это уравнение имеет два решения X_1 и X_2, тогда находим, что $AX_1 = B$ и $AX_2 = B$, т. е. $AX_1 = AX_2$ или $A(X_1 - X_2) = 0$. Но так как $|A| \neq 0$, то, следовательно, $X_1 - X_2 = 0$ и $X_1 = X_2$; оба решения совпадают. Доказательство единственности решения для уравнения (31) будет аналогично.

Рассмотрим теперь уравнение

$$A_1 A_2 \ldots A_n = X = E \qquad (\text{Т}).$$

Умножив это уравнение слева на $A_n^{-1} \ldots A_2^{-1} A_1^{-1}$, получим

$$X = A_n^{-1} \ldots A_2^{-1} A_1^{-1} \qquad (\text{Т}').$$

С другой стороны, принимая $A_1 A_2 \ldots A_n = A$ и имея в виду уравнение (30) и его решение (32), находим:

$$X = A^{-1} E = (A_1 A_2 \ldots A_n)^{-1} \qquad (\text{Т}'')$$

Сравнивая равенства (Т′) и (Т″), выводим важную формулу:

$$(A_1 A_2 \ldots A_n)^{-1} = A_n^{-1} \ldots A_2^{-1} A_1^{-1} \qquad (34).$$

Возвышение в степень. Произведение m одинаковых матриц, т. е. $\underbrace{AA \ldots A}_{m \text{ раз}}$ обозначается символом A^m и называется m-ой степенью матрицы A. На основании закона ассоциативности, можем написать

$$A^m A^n = A^n A^m = A^{m+n} \qquad (35) \text{ и}$$

$$(A^m)^n = (A^n)^m = A^{mn} \qquad (36).$$

Если матрица A неособенная, то будем иметь:

$$A^{-m} = (A^{-1})^m \qquad (37).$$

Далее, равенство $A^{-m} A^m = A^0 = E$ показывает, что матрица A^{-m} является обратной по отношение к A^m; это обстоятельство можно записать так: $A^{-m} = (A^m)^{-1}$. Поэтому

$$A^{-m} = (A^{-1})^m = (A^m)^{-1} \qquad (38).$$

Мы предполагали, что m и n целые положительные числа. Легко также доказать, что формулы (35) и (36) справедливы и для всяких целых показателей.

Дальнейшая классификация матриц.

Укажем еще ряд типичных матриц, которые играют в теории матриц важную роль. Будем также рассматривать матрицы и с комплексными элементами. Пусть a_{ik} комплексное число и $\bar{a}_{ik}$ комплексное

ЭР01663

число, сопряженное с первым. В этом случае и матрица $\bar{A}=\|a_{ik}\|$ будет сопряженной с начальной. Далее, матрица $A^{*}=\bar{A}^{1}=\|\bar{a}_{ki}\|$ называется сопутствующей. Действительная матрица, для которой справедливо соотношение $AA^{1}=E$, называется ортогональной. Комплексная матрица, связанная с сопутствующей матрицей соотношением $AA^{*}=E$, называется унитарной. Матрица, характеризуемая условием $A=A^{*}$, причем $a_{ik}=\bar{a}_{ki}$, называется эрмитовской матрицей.

Квази-диагональная матрица.

Квази-диагональную матрицу можно рассматривать, как обобщение диагональной матрицы. Элементы квази-диагональной матрицы, отличные от нуля, находятся в квадратах, расположенных вдоль главной диагонали, а остальные элементы равны нулю. Положим, что $X_1,X_2,\ldots,X_m$ система матриц порядков соответственно $k_1,k_2,\ldots,k_m$, расположенных последовательно по главной диагонали квази-диагональной матрицы $A=[X_1,X_2,\ldots,X_m]$, порядок которой

$$n=k_1+k_2+\ldots+k_m.$$

На основании предыдущего легко установить следующие действия над квази-диагональными матрицами, причем предполагается, что матрицы одинаковой структуры:

$$[X_1,X_2,\ldots,X_m]+[Y_1Y_2,\ldots,Y_m]=[X_1+Y_1,X_2+Y_2,\ldots,X_m+Y_m] \quad (39),$$

$$[X_1,X_2,\ldots,X_m]\ [Y_1,Y_2,\ldots,Y_m]=[X_1Y_1,X_2Y_2,\ldots,X_mY_m] \quad (40)$$

$$[X_1,X_2,\ldots,X_m]^{p}=[X_1^{p},X_2^{p},\ldots,X_m^{p}] \quad (41).$$

Формула (41) имеет место и для целого отрицательного числа p, если матрицы неособенные.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОДНОЙ МАТРИЦЫ ЧЕРЕЗ ДРУГУЮ.

Если A произвольная матрица, а S неособенная матрица, то матрицу $B=SAS^{-1}$ (U) можно рассматривать как полученную путем преобразования матрицы A при помощи матрицы S. Умножая равенство (U) слева на S^{-1}, а справа на S, получим:

$$A=S^{-1}BS \quad (U').$$

Таким образом, матрица A преобразована из B с помощью матрицы S^{-1}. Матрицы A и B, характеризуемые равенствами (U) и (U'), называются подобными.

Приведем ряд операций над трансформированными матрицами:

A. Преобразование произведения двух матриц равно произведению преобразований этих матриц, т. е.

$$SABS^{-1}=SAS^{-1}\cdot SBS^{-1} \quad (V).$$

B. Если в соотношении (V) положим $A=B$, то

$$SA^{2}S^{-1}=(SAS^{-1})^{2} \text{ и вообще } SA^{p}S^{-1}=(SAS^{-1})^{p} \quad (V').$$

Здесь p, вообще говоря, может быть и целым отрицательным числом.

C. Преобразование отношения матриц (A и B) первого и второго рода равно отношению преобразований этих матриц

ЭР01663

$$S(A^{-1}B)S^{-1} = (SAS^{-1})^{-1}(SBS^{-1}),$$
$$S(BA^{-1})S^{-1} = (SBS^{-1})(SAS^{-1}) \qquad (V'').$$

Для квази-диагональных матриц имеет место, например, такая формула преобразования одной матрицы через другую:

$$[Y_1, \ldots, Y_m]\ [X_1, \ldots, X_m]\ [Y_1, \ldots, Y_m]^{-1} =$$
$$= [Y_1X_1Y_1^{-1}, \ldots, Y_mX_mY_m^{-1}] \qquad (W).$$

ПОНЯТИЕ О ФУНКЦИИ МАТРИЦЫ.

Установив основные действия матричной алгебры, мы можем определить алгебраическую функцию матрицы.

Пусть $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m$ (X) некоторая целая рациональная функция от x и A данная матрица, тогда равенство

$$f(A) = a_0E + a_1A + a_2A^2 + \ldots + a_mA^m \qquad (X')$$

представляет собою тоже некоторую матрицу; назовем ее целой рациональной функцией матрицы A.

Соотношению X можно придать такую форму

$$f(x) = a_m(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_m) \qquad (X''),$$

где x_1, x_2, ..., x_m корни функции $f(x)$.

Аналогично и матричное равенство (X') можем написать так:

$$f(A) = a_m(A - x_1E)\ (A - x_2E)\ldots(A - x_mE) \qquad (X''').$$

Если $$f(A) = f_1(A)f_2(A) \qquad (Y),$$

то и $$f(A) = f_2(A)f_1(A) \qquad (Y').$$

То обстоятельство, что

$$f_1(A)f_2(A) = f_2(A)f_1(A) \qquad (Y'')$$

объясняется тем, что в соотношении (Y'') под знаками f_1 и f_2 фигурирует только одна матрица.

Что же касается рациональной дроби $\frac{f_1(A)}{f_2(A)}$, то она имеет определенное значение в силу закона коммутативности, существующего для произведения функций матриц. Поэтому

$$f_2^{-1}(A)f_1(A) = f_1(A)f_2^{-1}(A).$$

Столь же просто выводятся правила умножения и возвышения в степень рациональных дробных функций.

ПОНЯТИЕ О ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ОПЕРАЦИЯХ НАД МАТРИЦАМИ.

Пусть элементы матрицы A будут непрерывными и дифференцируемыми функциями от x. Мы скажем, что $\frac{dA}{dx}$ есть производная матрицы A по x, если элементы этой матрицы являются производными от элементов начальной матрицы, так что

$$\frac{dA}{dx} = \left\| \frac{da_{ik}}{dx} \right\| \qquad (Z).$$

Нетрудно установить также и следующие правила дифференцирования матриц:

$$\frac{d}{dx}(A + B) = \frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dx} \qquad (Z'),$$

ЭР01663

$$\frac{d}{dx}(AB) = \frac{dA}{dx} B + A \frac{dB}{dx} \qquad (Z'').$$

Дифференцируя соотношение

$$AA^{-1} = E$$

по x, найдем производную обратной матрицы, а именно:

$$\frac{dA^{-1}}{dx} = -A^{-1} \frac{dA}{dx} A^{-1} \qquad (Z''').$$

Интегралом от матрицы мы назовем матрицу, членами которой служат интегралы от элементов начальной матрицы, т. е.

$$\int A dx = \| \int a_{ik} dx \| \qquad (Z^{IV}).$$

МЕТОД ЛЯГЕРРА.

Установив принципы теории матриц, мы можем приступить и к изложению метода Лягерра для интегрирования уравнения Монжа-Ампера.

О форме $W = Hr + 2Ks + Lt - M + N(rt - s^2)$.

Возьмем форму $W = Hr + 2Ks + Lt - M + N(rt - s^2)$ (42)

Форма W может быть представлена под видом детерминанта 4-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & r & s \\ 0 & 1 & s & t \\ a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} \qquad (42')$$

о представимости формы W посредством детерминанта (42′) будет нами сказано ниже. Будем также вместе с Лягерром называть выражение

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} \qquad (43).$$

представлением формы W. Если развернем определитель (42′) и приравняем ему форму W, то, сравнивая коэффициенты при $r, s, t, \ldots$, будем иметь следующие соотношения:

$$\left.\begin{array}{l} H = d\alpha - a\delta,\ 2K = d\beta - b\delta + a\gamma - c\alpha,\ L = b\gamma - c\beta,\ M = d\gamma - c\delta, \\ N = a\beta - b\alpha \end{array}\right\} \qquad (44).$$

По теореме Фонтеня, имеем

$$(b\gamma - c\beta)(a\delta - d\alpha) + (c\alpha - a\gamma)(b\delta - d\beta) + (a\beta - b\alpha)(c\delta - d\gamma) = 0 \qquad (45).$$

Делая соответствующие замены, напишем

$$(c\alpha - a\gamma)(b\delta - d\beta) = HL + MN \qquad (46).$$

Полагая затем $G = K^2 - HL - MN$, перепишем равенство (46) таким образом:

$$(c\alpha - a\gamma)(b\delta - d\beta) = K^2 - G = (K + \sqrt{G})(K - \sqrt{G}) \qquad (47).$$

В соотношении (47) можем принять:

$$K + \sqrt{G} = d\beta - b\delta \quad (48) \text{ и } K - \sqrt{G} = a\gamma - c\alpha \qquad (48').$$

Предполагая для общности все коэффициенты формы W, т. е. H, K, L, M, N отличными от нуля, мы будем иметь два рода пред-

ЭР01663

ставлений формы W. Знаку $+$ при $\sqrt{G}$ будет соответствовать представление

$$\left|\begin{matrix} a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{matrix}\right|,$$

а знаку $-$ при $\sqrt{G}$ будет соответствовать представление

$$\left|\begin{matrix} a^1 & b^1 & c^1 & d^1 \\ \alpha^1 & \beta^1 & \gamma^1 & \delta^1 \end{matrix}\right|.$$

Подобные представления Лягерр называет представлениями 1-го и 2-го рода. Докажем теперь основную теорему в теории Лягерра.

Теорема 1. Пусть форма W допускает два представления

$$\left|\begin{matrix} a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{matrix}\right| \quad \text{и} \quad \left|\begin{matrix} a^1 & b^1 & c^1 & d^1 \\ \alpha^1 & \beta^1 & \gamma^1 & \delta^1 \end{matrix}\right|.$$

Можно установить наличие 4-х соотношений:

$$\left.\begin{matrix} ac^1 + bd^1 - ca^1 - db^1 = 0, & a\gamma^1 + b\delta^1 - c\alpha^1 - d\beta^1 = 0, \\ ac^1 + \beta d^1 - \gamma a^1 - \delta b^1 = 0, & \alpha\gamma^1 + \beta\delta^1 - \gamma\alpha^1 - \delta\beta^1 = 0 \end{matrix}\right\} \quad (49).$$

Доказательство. Предполагая $G \neq 0$ и учитывая соотношение $-MN = HL - K^2 + G$, по правилу умножения матриц, будем иметь:

$$\left\|\begin{matrix} \alpha & a \\ \beta & b \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} d & -c \\ -\delta & \gamma \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} d\alpha - a\delta, & a\gamma - c\alpha \\ d\beta - b\delta, & b\gamma - c\beta \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} H, & K - \sqrt{G} \\ K + \sqrt{G}, & L \end{matrix}\right\| \quad (50),$$

$$\left\|\begin{matrix} \alpha^1 & a^1 \\ \beta^1 & b^1 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} d^1 & -c^1 \\ -\delta^1 & \gamma^1 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} H, & K + \sqrt{G} \\ K - \sqrt{G}, & L \end{matrix}\right\| \quad (50'),$$

$$\left\|\begin{matrix} d^1 & -\delta^1 \\ -c^1 & \gamma^1 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} \alpha^1 & \beta^1 \\ a^1 & b^1 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} H, & K - \sqrt{G} \\ K + \sqrt{G}, & L \end{matrix}\right\| \quad (51).$$

Умножая каждую часть равенства (51) слева на матрицу $\left\|\begin{matrix} \gamma^1 & \delta^1 \\ c^1 & d^1 \end{matrix}\right\|$ и справа на матрицу $\left\|\begin{matrix} \gamma & c \\ \delta & d \end{matrix}\right\|$, находим:

$$\left\|\begin{matrix} \gamma^1 & \delta^1 \\ c^1 & d^1 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} \alpha & a \\ \beta & b \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} d & -c \\ -\delta & \gamma \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} \gamma & c \\ \delta & d \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} \gamma^1 & \delta^1 \\ c^1 & d^1 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} d^1 & -\delta^1 \\ -c^1 & \gamma^1 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} \alpha^1 & \beta^1 \\ a^1 & b^1 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} \gamma & c \\ \delta & d \end{matrix}\right\| \quad (52),$$

или

$$\left\|\begin{matrix} \gamma^1 & \delta^1 \\ c^1 & d^1 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} \alpha & a \\ \beta & b \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} d\gamma - c\delta, & 0 \\ 0, & d\gamma - c\delta \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} d^1\gamma^1 - c^1\delta^1, & 0 \\ 0, & d^1\gamma^1 - c^1\delta^1 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} \alpha^1 & \beta^1 \\ a^1 & b^1 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} \gamma & c \\ \delta & d \end{matrix}\right\| \quad (53).$$

Но $d\gamma - c\delta = d^1\gamma^1 - c^1\delta^1 = M$; поэтому

$$\left\|\begin{matrix} \gamma^1 & \delta^1 \\ c^1 & d^1 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} \alpha & a \\ \beta & b \end{matrix}\right\| \cdot ME = ME \left\|\begin{matrix} \alpha^1 & \beta^1 \\ a^1 & b^1 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} \gamma & c \\ \delta & d \end{matrix}\right\| \quad (54).$$

Упрощая соотношение (54), получим:

$$\left\|\begin{matrix} \gamma^1 & \delta^1 \\ c^1 & d^1 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} \alpha & a \\ \beta & b \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} \alpha^1 & \beta^1 \\ a^1 & b^1 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} \gamma & c \\ \delta & d \end{matrix}\right\| \quad (55).$$

Далее,

$$\left\|\begin{matrix} \alpha\gamma^1 + \beta\delta^1, & a\gamma^1 + b\delta^1 \\ c^1\alpha + d^1\beta, & ac^1 + bd^1 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} \alpha^1\gamma + \beta^1\delta, & ca^1 + d\beta^1 \\ a^1\gamma + b^1\delta, & a^1c + b^1d \end{matrix}\right\| \quad (56),$$

отсюда

$$\left.\begin{matrix} \alpha\gamma^1 + \beta\delta^1 = \alpha^1\gamma + \beta^1\delta, & c^1\alpha + d^1\beta = a^1\gamma + b^1\delta, \\ a\gamma^1 + b\delta^1 = c\alpha^1 + d\beta^1, & ac^1 + bd^1 = a^1c + b^1d \end{matrix}\right\} \quad (56').$$

Соотношения (56′) являются искомыми, т. е. соотношениями (49).

ЭР01663

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ $W=0$.

Положим, что p, q, r, s, t суть известные параметры Монжа и коэффициенты уравнения функции от x, y, z, p, q; требуется интегрировать уравнение $W=0$ (57). Положим далее, что W, которое имеет также форму вышеупомянутого детерминанта 4-го порядка, соответствуют два представления:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} \quad (58) \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 & d^1 \\ \alpha^1 & \beta^1 & \gamma^1 & \delta^1 \end{vmatrix} \qquad (58').$$

Теперь уже нетрудно доказать следующую теорему:

Теорема 2. *Если $u=f(v)$ промежуточный интеграл уравнения (57), причем f знак произвольной функции, то каждая из функций u и v есть решение системы уравнений в частных производных 1-го порядка:*

$$\left.\begin{aligned} a\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)+b\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)+c\frac{\partial V}{\partial p}+d\frac{\partial V}{\partial q}=0 \\ \alpha\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)+\beta\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)+\gamma\frac{\partial V}{\partial p}+\delta\frac{\partial V}{\partial q}=0 \end{aligned}\right\} \qquad (59)$$

или же системы:

$$\left.\begin{aligned} a^1\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)+\beta^1\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)+c^1\frac{\partial V}{\partial p}+d^1\frac{\partial V}{\partial q}=0 \\ \alpha^1\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)+\beta^1\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)+\gamma^1\frac{\partial V}{\partial p}+\delta^1\frac{\partial V}{\partial q}=0 \end{aligned}\right\} \qquad (60).$$

В уравнениях (59) и (60) символы $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)$ и $\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)$ имеют следующий смысл:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)=\frac{\partial V}{\partial x}+p\frac{\partial V}{\partial z} \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)=\frac{\partial V}{\partial y}+q\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Доказательство. Дифференцируя по x и по y равенство $u=f(v)$, получим:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+r\frac{\partial u}{\partial p}+s\frac{\partial u}{\partial q}=f'(v)\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+r\frac{\partial v}{\partial p}+s\frac{\partial v}{\partial q}\right], \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+s\frac{\partial u}{\partial p}+t\frac{\partial u}{\partial q}=f'(v)\left[\left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)+s\frac{\partial v}{\partial p}+t\frac{\partial v}{\partial q}\right] \end{aligned}\right\} \qquad (61).$$

Исключая из уравнений (61) функцию $f'(v)$, находим:

$$W=\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+r\frac{\partial u}{\partial p}+s\frac{\partial u}{\partial q}, & \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+r\frac{\partial v}{\partial p}+s\frac{\partial v}{\partial q} \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+s\frac{\partial u}{\partial p}+t\frac{\partial u}{\partial q}, & \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)+s\frac{\partial v}{\partial p}+t\frac{\partial v}{\partial q} \end{vmatrix} \qquad (62).$$

Детерминант 2-го порядка, стоящий в правой части, можно заменить детерминантом 4-го порядка. В самом деле, имеем:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & d \\ e, & f, & g-ae, & h-be \\ i, & j, & k-ai, & l-bi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & c & d \\ f, & g-ae, & h-be \\ j, & k-ai, & l-bi \end{vmatrix} =$$

ЭР01663

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f,\ g-ae-cf, & h-be-df \\ g,\ k-ai-cj, & l-bi-dj \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g-ae-cf, & h-be-df \\ k-ai-cj, & l-bi-dj \end{vmatrix} \quad (63).$$

Полагая в соотношении (63) последовательно

$$a=r,\ b=c=s,\ d=t,\ e=-\frac{\partial u}{\partial p}, f=-\frac{\partial u}{\partial q}, g=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right), h=\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$i=-\frac{\partial v}{\partial p},\ j=-\frac{\partial v}{\partial q},\ k=\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right),\ l=\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right),$$ получим:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & r & s \\ 0 & 1 & s & t \\ -\frac{\partial u}{\partial p} & -\frac{\partial u}{\partial q} & \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ -\frac{\partial v}{\partial p} & -\frac{\partial v}{\partial q} & \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+r\frac{\partial u}{\partial p}+s\frac{\partial u}{\partial q}, & \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+s\frac{\partial u}{\partial p}+t\frac{\partial u}{\partial q} \\ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+r\frac{\partial v}{\partial p}+s\frac{\partial v}{\partial q}, & \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)+s\frac{\partial v}{\partial p}+t\frac{\partial v}{\partial q} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+r\frac{\partial u}{\partial p}+s\frac{\partial u}{\partial q}, & \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+r\frac{\partial v}{\partial p}+s\frac{\partial v}{\partial q} \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+s\frac{\partial u}{\partial p}+t\frac{\partial u}{\partial q}, & \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)+s\frac{\partial v}{\partial p}+t\frac{\partial v}{\partial q} \end{vmatrix} = W \quad (63').$$

Следовательно выражение

$$\begin{vmatrix} -\frac{\partial u}{\partial p} & -\frac{\partial u}{\partial q} & \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ -\frac{\partial v}{\partial p} & -\frac{\partial v}{\partial q} & \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \end{vmatrix} \quad (64)$$

является представлением W.

На основании теоремы 1-ой, легко теперь убедиться, что функции u и v удовлетворяют системе уравнений (59) или (60), смотря по тому, будет ли представление (64) второго или первого рода. Действительно, принимая соотношение (64) за представление 2-го рода по отношению к W, положим:

$$a^1=-\frac{\partial u}{\partial p},\ b^1=-\frac{\partial u}{\partial q},\ c^1=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right),\ d^1=\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$\alpha^1=-\frac{\partial v}{\partial p},\ \beta^1=-\frac{\partial v}{\partial q},\ \gamma^1=\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right),\ \delta^1=\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right).$$

Следовательно, например, равенство

$$ac^1+bd^1-ca^1-db^1=0$$

примет вид

$$a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+b\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)-c\left(-\frac{\partial u}{\partial p}\right)-d\left(-\frac{\partial u}{\partial q}\right)=0,$$

или

ЭР01663

$$a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+b\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+c\left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)+d\left(\frac{\partial u}{\partial q}\right)=0,$$

что и оправдывает нашу теорему,

Обратная теорема. Справедлива также теорема, обратная 2-ой: *Если u и v решения системы уравнений (59) или (60), то $u=f(v)$, где f произвольная функция, есть промежуточный интеграл уравнения (57).*

Доказательство. Предполагая, что V есть некоторый интеграл, напр., системы (59), имеем:

$$\left.\begin{aligned} a\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)+b\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)+c\frac{\partial V}{\partial p}+d\frac{\partial V}{\partial q}=0\\ \alpha\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)+\beta\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)+\gamma\frac{\partial V}{\partial p}+\delta\frac{\partial V}{\partial q}=0\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(59).$$

Кроме того, так как V есть функция x, y, z, p и q, можем написать еще два уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)+r\frac{\partial V}{\partial p}+s\frac{\partial V}{\partial q}=0,\\ \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)+s\frac{\partial V}{\partial p}+t\frac{\partial V}{\partial q}=0\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(65).$$

Исключая из уравнений (59) и (65) величины

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right),\ \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right),\ \frac{\partial V}{\partial p}\text{ и }\frac{\partial V}{\partial q},$$

находим $W=\begin{vmatrix} 1 & 0 & r & s\\ 0 & 1 & s & t\\ a & b & c & d\\ \alpha & \beta & \gamma & \delta\end{vmatrix}=0\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(57)$

откуда следует, что V есть интеграл уравнения (57). Два частных интеграла u и v можно рассматривать как два значения V; эти интегралы служат решениями линейных уравнений (59), поэтому и $u=f(v)$ удовлетворяет уравнениям (59), а, следовательно, и уравнению (57).

Условие интегрируемости.

Пусть u и v два общих решения системы уравнений (59), а u^1 и v^1 два общих решения системы (60). В этом случае уравнение (57) допускает два промежуточных интеграла $u=f_1(v)$ и $u^1=f_2(v^1)$. Если можно решить два последних уравнения относительно p и q, то, после подстановки этих значений в уравнение $dz=pdx+qdy$, мы можем интегрировать это уравнение, потому что условие интегрируемости соблюдается. В самом деле, в нашем случае 2 представления W будут таковы:

$$\begin{vmatrix} -\frac{\partial u}{\partial p}-\frac{\partial u}{\partial q}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\\ -\frac{\partial v}{\partial p}-\frac{\partial v}{\partial q}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\end{vmatrix}\text{ и }\begin{vmatrix} -\frac{\partial u^1}{\partial p}-\frac{\partial u^1}{\partial q}\left(\frac{\partial u^1}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u^1}{\partial y}\right)\\ -\frac{\partial v^1}{\partial p}-\frac{\partial v^1}{\partial q}\left(\frac{\partial v^1}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v^1}{\partial y}\right)\end{vmatrix}$$

ЭР01663

Поэтому, основываясь на теореме 1-ой, искомое условие интегрируемости можно представить следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial p}\left(\frac{\partial u^1}{\partial x}\right)+\frac{\partial u}{\partial q}\left(\frac{\partial u^1}{\partial y}\right)-\frac{\partial u^1}{\partial p}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial u^1}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0 \quad \ldots \quad (65).$$

В заключение настоящей работы приведем еще способ интегрирования уравнения Монжа-Ампера, заимствованный нами из известной книги Forsyth, Lehrbuch der Differential — gleichungen. Этот способ приписывают Монжу, а развитие его Амперу. Он довольно удобен в практическом отношении.

Возьмем уравнение Монжа-Ампера:

$$Rr+Ss+Tt+U(rt-s^2)=V \quad \ldots \quad (66).$$

Мы имеем всегда

$$dp=rdx+sdy \quad \ldots \quad (67),$$

$$dq=sdx+tdy \quad \ldots \quad (68).$$

Решая уравнения (67) и (68) относительно r и t и подставляя найденные выражения этих величин в уравнение (66), получим:

$$Rdpdy+Tdqdx+Udpdq-Vdxdy=$$
$$=s(Rdy^2-Sdxdy+Tdx^2+Udpdx+Udqdy) \quad \ldots \quad (69).$$

Уравнению (69) можно удовлетворить, полагая:

$$Q=Rdpdy+Tdqdx+Udpdq-Vdxdy=0 \quad \ldots \quad (70)$$

и $$P=Rdy^2-Sdxdy+Tdx^2+Udpdx+Udqdy=0 \quad \ldots \quad (71).$$

К этим последним уравнениям нужно еще присоединить уравнение:

$$dz=pdx+qdy \quad \ldots \quad (71').$$

Умножая теперь уравнение (70) на λ и складывая с уравнением (71), получим:

$$Rdy^2+Tdx^2-(S+\lambda V)dx\,dy+Udpdx+Udqdy+$$
$$+\lambda Rdpdy+\lambda Tdqdx+\lambda Udpdq=0 \quad \ldots \quad (72),$$

или короче

$$P+\lambda Q=0 \quad \ldots \quad (72').$$

Разложим левую часть уравнения (72') на два линейных множителя так, чтобы было

$$P+\lambda Q=(Ady+Bdx+Cdp)(Edy+Fdx+Gdq) \quad \ldots \quad (73).$$

Приравнивая сначала коэффициенты при dy^2, dx^2 и $dpdq$ в равенстве (73), находим:

$$AE=R,\ BF=T,\ CG=\lambda U \quad \ldots \quad (74).$$

Полагая $E=1$, $F=\frac{1}{k}$, $G=\frac{\lambda}{m}$ . . . . . (75),

имеем:

$$A=R,\ B=kT,\ C=mU \quad \ldots \quad (76).$$

Сравнивая коэффициенты у остальных членов равенства (73), получим

$$kT+\frac{1}{k}R=-(S+\lambda V) \quad (77);\quad \frac{1}{m}\lambda R=U \quad \ldots \quad (78),$$

$$k\frac{\lambda}{m}T=\lambda T \quad \ldots \quad (79),\quad mU=\lambda R \quad \ldots \quad (80),\quad \frac{m}{k}U=U \quad \ldots \quad (81).$$

Последние соотношения удовлетворяются, если положим

$$m=k=\lambda\frac{R}{U} \quad \ldots \quad (82)$$

ЭР01663

причем λ определится из уравнения:

$$\lambda^2(RT+UV)+\lambda US+U^2=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (83),$$

которое составляется с помощью уравнений (82) и (77).

На основании соотношений (75) и (76) уравнение (72) можно представить так:

$$(Rdy+kTdx+mUdp)\left(dy+\frac{1}{k}\,dx+\frac{\lambda}{m}\,dq\right)=0 \quad . \quad . \quad . \quad (84).$$

Пусть λ_1 и λ_2 различные корни уравнения (83), тогда, принимая в соображение равенство (82), вместо (84)-го, найдем такие уравнения:

$$(Udy+\lambda_1 Tdx+\lambda_1 Udp)(Udx+\lambda_1 Rdy+\lambda_1 Udq)=0 \quad . \quad . \quad (85) \text{ и}$$

$$(Udy+\lambda_2 Tdx+\lambda_2 Udp)(Udx+\lambda_2 Rdy+\lambda_2 Udq)=0 \quad . \quad . \quad (86).$$

Из уравнений (85) и (86) выводим следующие уравнения:

$Udy+\lambda_1 Tdx+\lambda_1 Udp=0$. (87), $Udx+\lambda_2 Rdy+\lambda_2 Udq=0$. (88),

$Udx+\lambda_1 Rdy+\lambda_1 Udq=0$ . . (89), $Udy+\lambda_2 Tdx+\lambda_2 Udp=0$ . . (90).

Уравнения (87) и (88) доставят один промежуточный интеграл $u_1=f_1(v_1)$, а уравнения (89) и (90) — другой промежуточный интеграл $u_2=f_2(v_2)$ начального дифференциального уравнения. В том же случае, когда корни уравнения (83) будут равные, мы получим только один промежуточный интеграл. В этом случае имеет место соотношение:

$$S^2=4(RT+UV) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (91).$$

Примеры. Интегрировать уравнения:

1. $3r+4s+t+(rt-s^2)=1$ (Пиаджио).

Здесь $R=3$, $S=4$, $T=1$, $U=1$, $V=1$. Уравнение (83) в данном случае примет вид:

$4\lambda^2+4\lambda+1=0$. Мы имеем квадратное уравнение с равными корнями $\lambda_1=\lambda_2=-\frac{1}{2}$. Поэтому мы найдем только один промежуточный интеграл, который доставят нам уравнения (87) и (88). Действительно, $dy-\frac{1}{2}\,dx-\frac{1}{2}\,dp=0$, $dx-\frac{3}{2}\,dy-\frac{1}{2}\,dq=0$; отсюда $p+x-2y=a$, $q-2x+3y=b$. Поэтому промежуточный интеграл заданного уравнения будет $p+x-2y=f(q-2x+3y)$. Чтобы найти полный интеграл предложенного уравнения, содержащий произвольные постоянные a, b, c, определим p и q из вышенайденных частных интегралов и подставим их выражения в уравнение $dz=pdx+qdy$. Имеем $dz=(a+2y-x)dx+(b+2x-3y)dy$, отсюда

$$z=-\frac{x^2}{2}+2xy-\frac{3}{2}\,y^2+ax+by+c.$$

Легко удостовериться простою подстановкою в начальное уравнение, что, во-первых, только что найденное выражение z является его полным интегралом; а, во-вторых, что условие интегрируемости (65) уравнения $dz=pdx+qdy$ здесь соблюдается.

2. $7r-8s-3t+(rt-s^2)=36$ (Пиаджио).

Квадратное уравнение, определяющее λ, будет таково:

$15\lambda^2-8\lambda+1=0$, отсюда $\lambda_1=\frac{1}{3}$, $\lambda_2=\frac{1}{5}$. Далее, уравнения (87), (88), (89) и (90) примут вид:

ЭР01663

ДВГНБ

$$dy - dx + \frac{1}{3}dp = 0,\ dx + \frac{7}{5}dy + \frac{1}{5}dq = 0,\ dx + \frac{7}{3}dy + \frac{1}{3}dq = 0,$$

$$dy - \frac{3}{5}dx + \frac{1}{5}dp = 0.$$

Интегрируя эти уравнения, получим:

$$p - 3x + 3y = a,\ q + 5x + 7y = b,\ q + 3x + 7y = c,\ p - 3x + 5y = d.$$

Промежуточные интегралы соответственно запишутся следующим образом:

$$p - 3x + 3y = f(q + 5x + 7y) \text{ и } p - 3x + 5y = F(q + 3x + 7y).$$

Принимая теперь $q + 5x + 7y = \alpha$, $q + 3x + 7y = \beta$, где α и β суть параметры, способные изменяться, будем иметь еще два уравнения:

$$p - 3x + 3y = f(\alpha),\ p - 3x + 5y = F(\beta).$$

Из четырех последних уравнений находим:

$$2x = \alpha - \beta,\ 2y = F(\beta) - f(\alpha),\ p = 3x - 3y + f(\alpha),\ q = \beta - 3x - 7y.$$

Чтобы найти окончательное решение предложенного уравнения, подставим выражения p и q в уравнение (71). В результате подстановки будем иметь:

$$dz = [3x - 3y + f(\alpha)]dx + (\beta - 3x - 7y)dy \text{ или}$$

$$dz = 3xdx - 3(ydx + xdy) + \frac{f(\alpha)}{2}(d\alpha - d\beta) + \frac{\beta}{2}\left\{F'(\beta)d\beta - f'(\alpha)d\alpha\right\} -$$

$$- 7ydy = 3xdx - 3d(xy) - 7ydy + \frac{f(\alpha)d\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}F'(\beta)d\beta -$$

$$- \frac{1}{2}\left\{f(\alpha)d\beta + \beta f'(\alpha)d\alpha\right\}$$

Интегрируя последнее уравнение, получим:

$$z = \frac{3}{2}x^2 - 3xy - \frac{7}{2}y^2 + \frac{1}{2}\int f(\alpha)d\alpha + \frac{1}{2}\int \beta F'(\beta)d\beta - \frac{1}{2}\beta f(\alpha).$$

Пусть $\int f(\alpha)d\alpha = \Phi(\alpha)$ и $\int F(\beta)d\beta = \Psi(\beta)$. Легко видеть, что

$$\int \beta F'(\beta)d\beta = \beta F(\beta) - \int F(\beta)d\beta = \beta\Psi'(\beta) - \Psi(\beta).$$

Следовательно,

$$z = \frac{3}{2}x^2 - 3xy - \frac{7}{2}y^2 + \frac{1}{2}\Phi(\alpha) + \beta\frac{F(\beta)}{2} - \frac{1}{2}\Psi(\beta) - {}^1/_2\beta f(\alpha)$$

или окончательно

$$2z = 3x - 6xy - 7y^2 + \Phi(\alpha) - \Psi(\beta) + 2\beta y.$$

3. $rt - s^2 - pqs = 0$ (Lainé).

Для решения этой задачи воспользуемся методом характеристик. В уравнении (4) нужно положить:

$$H = 0,\ 2K = -pq,\ L = 0,\ M = 0,\ N = 1.$$

Уравнения (7'), (10') и (11') доставят нам: $\lambda^2 - pq\lambda = 0$, отсюда $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = pq$;

$$dp = 0,\ dq + pqdx = 0,\ dz - pdx - qdy = 0 \text{ и}$$
$$dq = 0,\ dp + pqdy = 0,\ dz - pdx - qdy = 0.$$

ЭР01663

Интегрируя уравнения обеих систем характеристик, будем иметь следующие промежуточные интегралы:

$$\lg q + px = pf(\mathrm{p}),\ \lg p + qy = qF(\mathrm{q}).$$

Полагая теперь $p = \alpha$ и $q = \beta$, где α и β переменные параметры, находим:

$$x = f(\alpha) - \frac{\lg\beta}{\alpha},\ y = F(\beta) - \frac{\lg\alpha}{\beta}.$$

При этих условиях уравнение $dz = pdx + qdy$ примет форму:

$$dz = \alpha f'(\alpha)d\alpha + \frac{\lg\beta}{\alpha}\,d\alpha - \frac{d\beta}{\beta} + \beta F'(\beta) + \frac{\lg\alpha}{\beta}\,d\beta - \frac{d\alpha}{\alpha}.$$

Пусть

$$\int f(\alpha)d\alpha = \varphi(\alpha) \text{ и } \int F(\beta)d\beta = \Psi(\beta), \text{ тогда}$$

$$z = \alpha\varphi'(\alpha) - \varphi(\alpha) + \beta\Psi'(\beta) - \Psi(\beta) + \lg\alpha\lg\beta - \lg(\alpha\beta).$$

ДВГНБ

ЭР01663

ДВГНБ

ЭР01663

С. П. Слугинов.

УРАВНЕНИЕ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ.

EQUATION DE STURM-LIOUVILLE.

Par S. P. Slouginoff.

ВВЕДЕНИЕ.

В ряде мемуаров, напечатанных по преимуществу в „Journal de Mathématiques pures et appliquées", Штурм и Лиувилль подвергли подробному анализу линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка с переменными коэффициентами, т. е. уравнение вида:

$$P_0 \frac{d^2y}{dx^2} + P_1 \frac{dy}{dx} + P_2 y = Q,$$

где коэффициенты P_0, P_1, P_2, и Q суть функции x, причем Q может быть и нуль. В своем исходном мемуаре (Journ. de Math. pur. et appl. t. I, pp. 106—187) Штурм рассматривает дифференциальное уравнение

$$L \frac{d^2V}{dx^2} + M \frac{dV}{dx} + NV = 0,$$

где V неизвестная функция от x, которая должна удовлетворять данному уравнению для всех значений x, заключенных между двумя пределами $\bar{x}$, X; L, M, N суть функции от x, заданные для всех значений x, возрастающих от $\bar{x}$ до X. Это уравнение Штурм приводит к виду

$$\frac{d\left(K \frac{dV}{dx}\right)}{dx} + GV = 0,$$

где $$K = e^{\int \frac{M dx}{L}}, \quad G = \frac{N}{L} e^{\int \frac{M dx}{L}}.$$

Только что полученное уравнение обычно называют самосопряженным. В своих последующих мемуарах, напечатанных в I и II томе вышеупомянутого журнала, Штурм и Лиувилль рассматривают также уравнение формы

ЭР01663

ДВГНБ

$$g\frac{du}{dt}=\frac{d\left(K\frac{du}{dx}\right)}{dx}-lu,$$

где g, k, l суть функции x и u функция x и t. Это уравнение служит для изучения законов движения тепла в неоднородном брусе, помещенном в среду, температура которой постоянна и в частности равна 0°. Оно может быть преобразовано с помощью подстановки $u=Ve^{-rt}$, где r неопределенная константа, независимая от x и t, и V функция от x и независимая от t. В самом деле, имеем

$$\frac{du}{dt}=-Vre^{-rt},\quad \frac{du}{dx}=\frac{dV}{dx}e^{-rt}.$$

Поэтому начальное уравнение примет вид:

$$-grVe^{-rt}=\frac{d\left(K\frac{dV}{dx}\right)e^{-rt}}{dx}-lVe^{-rt},$$

или

$$\frac{d\left(K\frac{dV}{dx}\right)}{dx}+(gr-l)V=0 \qquad (x).$$

Уравнение (x) и называют обыкновенно уравнением Штурма-Лиувилля. Ввиду той важной роли, которую играет уравнение Штурма-Лиувилля во многих вопросах математической физики, мы считаем полезным дать сжатый эскиз теории этого уравнения в свете синтеза и в свете современности.

ЛИНЕЙНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ 2-го ПОРЯДКА И ЕГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ.

Возьмем линейное однородное дифференциальное уравнение

$$A\frac{d^2y}{dx^2}+B\frac{dy}{dx}+Cy=0 \qquad (1)$$

где A, B и C суть функции от x. Уравнение (1) мы всегда можем сделать самосопряженным. В самом деле, умножим уравнение (1) на произвольного фактора μ, тогда

$$A\mu y''+B\mu y'+C\mu y=0 \qquad (1').$$

Условие самосопряженности будет таково:

$$(A\mu)'=B\mu,\ \text{или}\ B\mu=A\mu'+A'\mu,\ \text{или}\ \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{d\xi}=\frac{B-A'}{A};$$

отсюда $\lg\mu=\int_{x_0}^{x}\frac{B-A'}{A}d\xi$, т. е. $\mu=e^{\int_{x_0}^{x}\frac{B-A'}{A}d\xi}$ (2).

Дифференцируя соотношение (2) по верхней границе, находим:

$$\mu'=\mu\frac{B-A'}{A},\quad B\mu=A\mu'+A'\mu.$$

Вставляя вместо $B\mu$ его выражение в уравнение (1'), получим:

ЭР01663

$$A\mu y'' + A\mu' y' + A'\mu + C\mu y = 0,$$

$$A\mu y'' + (A\mu)' y' + C\mu y = 0,$$

и, наконец,
$$(A\mu y')' + C\mu y = 0 \qquad (3).$$

Уравнение (3) и будет искомое.

Уравнение (3) называют иногда канонической формой уравнения (1)-го.

Теорема. *Можно всегда привести линейное уравнение 2-го порядка с переменными коэффициентами к виду*

$$\frac{d^2V}{dx^2} + GV = 0.$$

Возьмем вместе со Штурмом уравнение вида:

$$L\frac{d^2U}{dx^2} + M\frac{dU}{dx} + NU = 0 \qquad (a),$$

где L, M, N суть функции x, заданные между пределами $\bar{x}$ и X. Можно преобразовать его в следующее:

$$\frac{d\left(K\frac{dV}{dx}\right)}{dx} + GV = 0 \qquad (a').$$

Для этой цели делаем подстановку $U = \theta V$, где θ произвольная функция от x. Имеем:

$$\frac{dU}{dx} = \theta\frac{dV}{dx} + V\frac{d\theta}{dx}, \quad \frac{d^2U}{dx^2} = \theta\frac{d^2V}{dx^2} + 2\frac{d\theta}{dx}\frac{dV}{dx} + V\frac{d^2\theta}{dx^2}.$$

Следовательно, уравнение (a) примет вид:

$$L\theta\frac{d^2V}{dx^2} + \left(2L\frac{d\theta}{dx} + M\theta\right)\frac{dV}{dx} + \left(L\frac{d^2\theta}{dx^2} + M\frac{d\theta}{dx} + N\theta\right)V = 0 \qquad (b).$$

Что касается уравнения (a'), то его можно переписать так:

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{1}{K}\cdot\frac{dK}{dx}\cdot\frac{dV}{dx} + \frac{G}{K}V = 0 \qquad (a'').$$

Уподобляя уравнение (a'') уравнению (b), разделив предварительно это последнее на $L\theta$, находим:

$$\frac{1}{K}\frac{dK}{dx} = 2\frac{1}{\theta}\frac{d\theta}{dx} + \frac{M}{L} \qquad (c),$$

$$\frac{G}{K} = \frac{L\frac{d^2\theta}{dx^2} + M\frac{d\theta}{dx} + N\theta}{L\theta} \qquad (d).$$

Интегрируя уравнение (c), имеем

$$\lg K = 2\lg\theta + \int\frac{M}{L}dx,$$

или
$$K = \theta^2 e^{\int\frac{M}{L}dx} \qquad (e).$$

ЭР01663

ДВГНБ

А потому

$$G = \frac{K}{L\vartheta}\left(L\frac{d^2\vartheta}{dx^2} + M\frac{d\vartheta}{dx} + N\vartheta\right) = \frac{\vartheta}{L}e^{\int\frac{Mdx}{L}}\left(L\frac{d^2\vartheta}{dx^2} + M\frac{d\vartheta}{dx} + N\vartheta\right) =$$

$$= \vartheta\left(e^{\int\frac{Mdx}{L}}\cdot\frac{d^2\vartheta}{dx^2} + e^{\int\frac{Mdx}{L}}\cdot\frac{M}{L}\frac{d\vartheta}{dx}\right) + \frac{N\vartheta^2}{L}e^{\int\frac{Mdx}{L}} =$$

$$= \vartheta\frac{d}{dx}\left(e^{\int\frac{Mdx}{L}}\frac{d\vartheta}{dx}\right) + \frac{N\vartheta^2}{L}e^{\int\frac{Mdx}{L}} \qquad \text{(f)}.$$

Формулами (e) и (f) определяются K и G в новом уравнении (a'), заменяющем предложенное (a). Если $\vartheta = 1$, то $U = V$ и мы получим преобразование уравнения (a), указанное во введении.

Когда уравнение (a) приведено к канонической форме, то M можно положить равным $\frac{dL}{dx}$. В таком случае наше уравнение можно переписать так:

$$L\frac{d^2U}{dx^2} + \frac{dL}{dx}\frac{dU}{dx} + NU = 0 \qquad \text{(g)},$$

или иначе

$$\frac{d\left(L\frac{dU}{dx}\right)}{dx} + NU = 0 \qquad \text{(g')}.$$

В нашем случае формулы (e) и (f) примут вид:

$$K = \vartheta^2 e^{\int\frac{dL}{L}} = \vartheta^2 e^{\lg L} = \vartheta^2 L \qquad \text{(e')},$$

$$G = N\vartheta^2 + \vartheta\frac{d\left(L\frac{d\vartheta}{dx}\right)}{dx} \qquad \text{(f')}.$$

Если теперь положим $K = 1$, то $\vartheta = \frac{1}{\sqrt{L}}$ (h

и $$G = \frac{N}{L} - \frac{1}{L}\frac{d^2\sqrt{L}}{dx^2}, \qquad U = \frac{V}{\sqrt{L}} \qquad \text{(i)}.$$

Поэтому уравнение (g') преобразуется в такое

$$\frac{d^2V}{dx^2} + GV = 0 \qquad \text{(j)},$$

что мы и хотели установить.

Теорема сравнения. Докажем теперь одну из теорем сравнения Штурма по Пикару, а именно:

пусть даны два уравнения $\frac{d^2y}{dx^2} + y\varphi(x) = 0$, $\frac{d^2z}{dx^2} + z\psi(x) = 0$ (k),

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ две непрерывных функции в данном интервале. Положим в этом интервале $\varphi(x) \leqq \psi(x)$ (l) и x_0 и x_1 два последовательных корня интеграла $y(x)$ в том же интервале. Докажем, что *существует по крайней мере один корень всякого интеграла $z(x)$ второго уравнения между x_0 и x_1.*

ЭР01663

Предположим противное, и тогда мы можем допустить, что в интервале (x_0, x_1) две функции y и z будут положительны. Из уравнений (k) находим, что

$$z\frac{d^2y}{dx^2} - y\frac{d^2z}{dx^2} = zy[\psi(x) - \varphi(x)] \qquad (\text{m}).$$

Интегрируя равенство (m), получим

$$\left(z\frac{dy}{dx} - y\frac{dz}{dx}\right)_{x_0}^{x_1} = \int_{x_0}^{x_1} yz[\psi(x) - \varphi(x)]dx \qquad (\text{m}').$$

Согласно условию, вторая часть соотношения (m') положительна, поэтому

$$\left(z\frac{dy}{dx} - y\frac{dz}{dx}\right)_{x_0}^{x_1} > 0 \qquad (\text{n}).$$

Но в силу условия и теоремы Ролля, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$ не может быть отрицательной, а $\left(\frac{dy}{dx}\right)_1$ положительной; кроме того, так как z_0 и z_1 не отрицательны, то, следовательно, неравенство (n) не имеет места. Поэтому z не может быть все время положительной, а должна переходить от отрицательных значений к положительным или наоборот.

Вследствие непрерывности функции z, последнее обстоятельство может иметь место только в том случае, когда z переходит через корень. Только что доказанная теорема остается справедливой и в том случае, когда $\varphi(x) = \psi(x)$. Но теперь теорему следует видоизменить так:

по отношению к уравнению $\frac{d^2y}{dx^2} + y\varphi(x) = 0$ (k')

корни одного интеграла отделяют корни всякого другого интеграла того же самого дифференциального уравнения.

Сделаем еще добавление для случая, когда $\varphi(x)$ не является постоянно равной $\psi(x)$. Если x_0 есть общий корень интегралов y и z, то z будет иметь по крайней мере один корень в интервале (x_0, x_1), за исключением x_1, потому что, в противном случае, z имела бы один и тот же знак между x_0 и x_1, допустим положительный. Следовательно, мы имели бы неравенство:

$$z_1\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 > 0 \qquad (\text{n}').$$

Мы пришли к нелепому результату, так как z_1, согласно допущению, неотрицательна, а $\left(\frac{dy}{dx}\right)_1$ неположительна. Поэтому z не может быть знакопостоянной, т. е., в силу непрерывности, меняет знак, переходя через корень в интервале (x_0, x_0).

Пример. Возьмем уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} + A(x)y = 0 \qquad (\text{o}).$$

Положим, что, начиная с некоторого значения x, например, $x = 0$,

ЭР01663

функция $A(x)$ будет непрерывна для всякого конечного значения x; кроме того, для положительных значений x $A(x) > a$, где a некоторая положительная константа. Мы утверждаем, что в этом случае уравнение $y(x) = 0$, где $y(x)$ будет некоторый интеграл уравнения (o), допускает бесконечное число положительных корней. В самом деле, сопоставим уравнение (o) и уравнение

$$\frac{d^2z}{dx^2} + az = 0 \qquad (o')$$

Общий интеграл уравнения (o') будет

$$z = Acs(\sqrt{a}x) + Bsn(\sqrt{a}x).$$

Следовательно, уравнение $z = 0$ имеет бесконечное число корней, а потому таково же, по теореме Штурма, будет и число корней уравнения $y = 0$.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ И ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ.

Будем теперь рассматривать уравнение Штурма-Лиувилля в форме:

$$p(x)\frac{d^2y}{dx^2} + p'(x)\frac{dy}{dx} + [q(x) + \lambda r(x)]y = 0 \qquad (1)$$

или

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + [q(x) + \lambda r(x)]y = 0 \qquad (1').$$

Уравнение (1) можно короче записать и таким образом:

$$L(y) + \lambda ry = 0 \qquad (1''),$$

где

$$L(y) = \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + q(x)y \qquad (2)$$

есть, так называемый, оператор. Уравнение (1) называется однородным; если же в правой его части вместо нуля стоит функция $f(x)$, то это уравнение называется неоднородным.

На функции, входящие в состав уравнения (1), мы налагаем следующие условия: они непрерывны и допускают две непрерывные производные в интервале $a \leq x \leq b$ (p). Кроме того,

$$p(x) > 0,\ q(x) \leq 0,\ r(x) > 0 \qquad (q).$$

При этих условиях все точки интервала (a, b) будут обыкновенными точками. Но в том случае, когда при $x = x_0$, взятом из промежутка (a, b), функция $\frac{p'(x)}{p(x)}$ имеет полюс не свыше 1-го порядка, а функции $\frac{q(x)}{p(x)}$ и $\frac{r(x)}{p(x)}$ полюс не свыше 2-го порядка, точка $x = x_0$ называется особенной. Если же у нас получатся полюсы более высоких порядков, чем только что указанные, мы будем иметь для $x = x_0$ существенно особенную точку.

В некоторых физических теориях получаются такие уравнения, для которых концы промежутка являются особенными точками. Заметим, что промежуток может быть и бесконечным.

Простейшая задача, которая имеет место по отношению к урав-

ЭР01663

нению (1), есть задача Коши. Для общего обыкновенного дифференциального уравнения задача Коши ставится так: требуется найти интеграл уравнения $\Phi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$, когда заданному значению $x = x_0$ соответствуют тоже данные

$$y = y_0,\ y' = y'_0, \ldots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}.$$

При нахождении решений дифференциальных уравнений математической физики из нескольких решений, а иногда и бесконечного множества их мы выбираем то, которое удовлетворяет физическим условиям задачи. Таковыми условиями являются дополнительные условия, которые разделяются на начальные и предельные (краевые). Общий вид предельных условий будет таков:

$$\left.\begin{aligned} L_1(y) &= \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) + \alpha_3 y(b) + \alpha_4 y'(b) = A, \\ L_2(y) &= \beta_1 y(a) + \beta_2 y'(a) + \beta_3 y(b) + \beta_4 y'(b) = B \end{aligned}\right\} \quad (r).$$

Если константы A и B отличны от нуля, то предельные условия неоднородны; в противном же случае будут однородны. В различного рода вопросах математической физики и механики, конечно, уравнения (r) могут принимать и более простую форму.

Если один или оба конца интервала (a, b) представляют собою особенные точки, то по отношению к одному или обоим условиям можно потребовать, чтобы в этих точках решение было или конечным или обращалось в бесконечность того или иного порядка.

ОДНОРОДНАЯ И НЕОДНОРОДНАЯ ЗАДАЧА.

Возьмем для простоты рассуждений линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка в форме:

$$y''(x) + p_1 y'(x) + p_2(y) = q(x) \quad (s).$$

Общий интеграл этого уравнения можно представить под видом

$$y(x) = y_0(x) + c_1\alpha_1(x) + c_2\alpha_2(x) \quad (t).$$

Для определения констант c_1 и c_2 в физических и механических задачах даются или начальные, или предельные условия. Первые дают значения функции и ее производной в какой-нибудь точке области; вторые дают значения функции в двух определенных точках области. Таким образом, для нахождения констант c_1 и c_2 будем иметь систему линейных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} c_1\alpha_1(x_1) + c_2\alpha_2(x_1) + y_0(x_1) &= y_1, \\ c_1\alpha_1(x_1) + c_2\alpha_2(x_2) + y_0(x_2) &= y_2 \end{aligned}\right\} \quad (u).$$

В одних случаях система линейных уравнений, служащих для определения констант c_1 и c_2, будет однородна, а в других неоднородна. Если система однородна, то имеем

$$\left.\begin{aligned} c_1\alpha_1(x_1) + c_2\alpha_2(x_1) &= 0, \\ c_1\alpha_1(x_2) + c_2\alpha_2(x_2) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (v).$$

Условием возможности для нахождения констант, отличных от нуля, будет равенство нулю детерминанта Δ, т. е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1(x_1) & \alpha_2(x_1) \\ \alpha_1(x_2) & \alpha_2(x_2) \end{vmatrix} = 0 \quad (v')$$

ЭР01663

Если же система уравнений, определяющих константы c_1 и c_2, неоднородна, т. е.

$$\left.\begin{aligned} c_1\alpha_1(x_1) + c_2\alpha_2(x_1) &= a_1, \\ c_1\alpha_1(x_2) + c_2\alpha_2(x_2) &= a_2 \end{aligned}\right\} \quad (w),$$

то условием совместности уравнений (w) будет

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1(x_1) & \alpha_2(x_1) \\ \alpha_1(x_2) & \alpha_2(x_2) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (w').$$

Пусть общий интеграл дифференциального уравнения (r) задан в форме

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \varphi(x),$$

где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ две линейно независимые функции.

Чтобы определить константы c_1 и c_2, подставим выражение общего интеграла в уравнения краевых условий (r), тогда, в силу свойства линейности, находим

$$\begin{aligned} c_1 L_1(y_1) + c_2 L_1(y_2) &= A - L_1(\varphi), \\ c_1 L_2(y_1) + c_2 L_2(y_2) &= B - L_2(\varphi). \end{aligned}$$

Как и выше, мы имеем случай однородности, если детерминант

$$\Delta = \begin{vmatrix} L_1(y_1) & L_1(y_2) \\ L_2(y_1) & L_2(y_2) \end{vmatrix} = 0$$

и случай неоднородности, если $\Delta \neq 0$. Задача называется о д н о р о д н о й, если заданное дифференциальное уравнение и предельные условия однородны. Если же какое-либо из этих условий не выполнено, то задача будет н е о д н о р о д н а. Заметим, что изучение свободных колебательных движений приводит к однородным задачам, вынужденных — к неоднородным.

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

О п р е д е л е н и е. Соотношение вида:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt \quad (x)$$

называется линейным неоднородным интегральным уравнением.

Здесь функции $f(x)$ и $K(x, t)$, а также и пределы интегрирования известны, а $u(x)$ — функция, которую требуется определить; λ — есть произвольный параметр, который в частности равен 1. Функция $K(x, t)$ носит название я д р а уравнения (x).

Если пределы интеграции в соотношении (x) постоянны, то это соотношение называется у р а в н е н и е м Ф р е д г о л ь м а. Кроме того, мы имеем уравнение Фредгольма 1-го рода, если в соотношении (x) функция $f(x) = 0$; если же нет, то мы имеем уравнение Фредгольма 2-го рода.

В том случае, когда верхний предел интеграции переменная величина ($b = x$), мы получим уравнение Вольтерра; типичных уравнений Вольтерра также два: 1-го рода, если $f(x) = 0$; 2-го рода, если $f(x) \neq 0$.

Гильберт, которому принадлежит предыдущая терминология ин-

ЭР01663

тегральных уравнений, рассматривал также интегральные уравнения вида:

$$h(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt \qquad (y).$$

В последнем уравнении, которое можно назвать линейным интегральным уравнением 3-го рода, предыдущие интегральные уравнения заключаются как частный случай.

В теории интегральных уравнений рассматриваются также уравнения более общего типа, чем выше приведенные, например, такие

$$u(x, y) = f(x, y) + \lambda \int_a^b \int_c^d K(x, y; t_1, t_2)\, u(t_1, t_2)dt_1 dt_2 \qquad \text{и т. д.}$$

Чтобы закончить нашу классификацию интегральных уравнений, упомянем еще о некоторых типах интегральных уравнений, которые представляют специальный интерес. Такими типами являются:

1) нелинейные уравнения, когда $u(t)$ входит в некоторой степени высшей 1 или под знаком функции общей с ядром;

2) особые уравнения, характеризуемые тем, что или, по крайней мере, один из пределов интеграла, входящего в состав этих уравнений, равен бесконечности, или ядро обращается в бесконечность в одной или нескольких точках данного интеграла.

СВЯЗЬ МЕЖДУ УРАВНЕНИЕМ ВОЛЬТЕРРА И ЛИНЕЙНЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ.

Между линейными дифференциальными уравнениями и интегральным уравнением Вольтерра существует тесная связь, которую мы и намерены установить. Для простоты рассуждения рассмотрим сначала линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = \varphi(x) \qquad (z),$$

причем будем предполагать, что в точке $x = 0$ функции $a_i(x)$ не имеют особенностей.

Пусть теперь $\frac{d^2y}{dx^2} = u(x)$, тогда последовательно будем иметь:

$$\frac{dy}{dx} = \int u(x)dx + C_1, \quad y = \int dx \int u(x)dx + C_1 x + C_2.$$

Но, в силу легко получаемой формулы,

$$\int_0^{(2)} X dx^2 = \int_0^{z=x} (z-x)X dx \qquad (z'),$$

находим, сделав в ней надлежащие замены:

$$\int_0^x u(t)dt^2 = \int_0^x (x-t)u(t)dt \qquad (z'').$$

Поэтому заданное уравнение перепишется следующим образом:

$$u(x) + \int_0^x \Big[a_1(x) + a_2(x)(x-t)\Big] u(t)dt + C_1 a_1(x) + C_2(x)a_2(x) + C_2 a_2(x) = \varphi(x) \qquad (z''').$$

ЭР01663

Полагая в формуле (z''') $C_1 = -c_1$, $C_2 = -c_2$, получим:

$$u(x) + \int_0^x \left[a_1(x) + a_2(x)(x-t) \right] u(t)dt = \varphi(x) +$$

$$+ C_1 \left[a_1(x) + x a_2(x) \right] + c_2 a_2(x) \qquad (z^{IV}).$$

Теперь уже нетрудно установить зависимость между линейным дифференциальным уравнением n-го порядка и линейным неоднородным интегральным уравнением Вольтерра. В самом деле, возьмем уравнение:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n(x)y = f(x) \qquad (A).$$

Пусть $\frac{d^n y}{dx^n} = u(x)$. Интегрируя это уравнение, последовательно имеем

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int_0^x u(x)dx + C_1,$$

. . . . . ,

$$y = \int_0^x u(x)dx^n + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_n \qquad (A'),$$

где символ $\int_0^x u(x)dx^n$ означает n-кратный интеграл от функции $u(x)$.

Применяя теперь известную формулу

$$\int_0^x u(t)dt^n = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} u(t)dt \qquad (B)$$

и полагая $C_i = -c_i$ . . . (B'), придадим уравнению (A) такой вид:

$$u(x) + \int_0^x \left[a_1(x) + a_2(x)(x-t) + \ldots + a_n(x)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \right] u(t)dt =$$

$$= \varphi(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x) \qquad (C),$$

где $$f_i(x) = a_i(x) + \frac{x}{1} a_{i+1}(x) + \ldots + \frac{x^{n-i}}{(n-i)!} a_n(x) \qquad (C').$$

Принимая в формуле (C) выражение в квадратных скобках равным $K(x, t)$, а правую часть равной $f(x)$, мы и получим интегральное уравнение Вольтерра. Заметим, что решение уравнения Вольтерра (C) эквивалентно решению задачи Коши, для линейного дифференциального уравнения (A). Единственность решения уравнения Вольтерра следует из того, что задача Коши в регулярных точках имеет только одно решение. Что же касается констант в уравнении (C), то они обычно определяются из дополнительных условий.

ПОНЯТИЕ ОБ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ.
Ортогональные подстановки.

Уравнения $$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k \; (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (D)$$

ЭР01663

ДВГНБ

характеризуют линейную и однородную субституцию (подстановку). Эта субституция будет ортогональной, если имеют место соотношения:

$$\sum_{p=1}^{n} a_{pi}a_{pk} = \begin{cases} 0, \text{ если } i \neq k \\ 1, \text{ если } i = k \end{cases} \quad (E),$$

где i и k изменяются от 1 до n включительно. Определитель ортогональной субституции называется ортогональным определителем; матрица, соответствующая этой субституции, называется ортогональной матрицей.

Свойства ортогональных субституций.

1. Решая уравнения (D) относительно x_k и пользуясь соотношениями (E), получим

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}y_k \quad (F).$$

2. Обозначая начальную матрицу через A, а матрицу, соответствующую субституции (F), через A', будем иметь:

$$AA' = A'A = E \quad (F'),$$

где E единичная матрица. Обозначая определитель матрицы A через $D(A)$ и замечая, что определители начальной (A) и транспонированной (A') матрицы равны между собой, находим:

$$D(A) \cdot D(A') = D(E)$$

или

$$\Delta^2 = 1, \quad \Delta = \pm 1 \quad (G),$$

где

$$\Delta = D(A) = D(A')$$

т. к. детерминант единичной матрицы $D(E) = 1$. Нетрудно видеть, что для ортогональной матрицы $A' = A^{-1}$.

3. Возвышая в квадрат и складывая систему уравнений (D), получим

$$\Sigma y_i^2 = \Sigma x_i^2 \quad (H).$$

4. Можно доказать, что инвариантное соотношение (H) характеризует ортогональную субституцию. Действительно, уравнения (D) доставят нам:

$$\Sigma y_i^2 = \Sigma a_{ik}^2 x_k^2 + 2\Sigma a_{pi}a_{pk}x_i x_k \quad (J).$$

Отсюда, в силу равенства H, мы и получим

$$\Sigma a_{ik}^2 = 1, \quad \Sigma a_{pi}a_{pk} = 0 \quad (E').$$

Исходя из соотношений (F) и имея в виду равенство (H), также найдем условия ортогональности и в такой форме:

$$\Sigma a_{ki}^2 = 1, \quad \Sigma a_{ip}a_{kp} = 0 \quad (E'').$$

Нетрудно также доказать, что произведение двух ортогональных преобразований будет ортогонально. Между произведением матриц этих преобразований существует также ортогональная зависимость. Если теперь $A = \|a_{ik}\|$ есть матрица, составленная из комплексных членов, то матрицу, элементы которой комплексно сопряжены с со-

ЭР01663

ДВГНБ

ответствующими элементами матрицы A, обозначают через $\bar{A}$, так что $\bar{A}=\|\bar{a}_{ik}\|$. Матрица A^*, которая характеризуется равенством $A^*=\bar{A}'$, называется матрицей, сопутствующей матрице A. Более общим понятием, чем ортогональность, является унитарность, характеризуемая равенством $A^*A=AA^*=E$.

Вообще основные свойства унитарных преобразований и матриц аналогичны соответствующим свойствам ортогональных преобразований и матриц. Предыдущие линейные преобразования и их основное свойство ортогональность играют важную роль, например, в эвклидовском пространстве n измерений.

Ортогональность векторов.

Положим теперь, что в эвклидовском пространстве n измерений взяты n прямоугольных осей координат, тогда квадрат длины вектора $\bar{x}$, составляющие которого $x_1, x_2, \ldots, x_n$, есть

$$\bar{x}^2=x^2=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2 \qquad \text{(J)}.$$

Далее, скалярное произведение двух векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ с компонентами x_i и y_i выразится формулой:

$$\bar{x}\,\bar{y}=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n \qquad \text{(J')}.$$

Формулу (J') можно, например, получать, рассматривая квадрат длины вектора $\bar{x}+\lambda\bar{y}$, а именно:

$$(\bar{x}+\lambda\bar{y})^2=\bar{x}^2+2\lambda\bar{x}\bar{y}+\lambda^2\bar{y}^2=\sum_i x_i^2+2\lambda\sum_i x_i\,y_i+\lambda^2\sum_i y_i^2 \qquad \text{(J'')}.$$

Скалярное умножение двух векторов коммутативно и дистрибутивно. Косинус угла между двумя векторами представится таким образом:

$$cs(\bar{x}\bar{y})=\frac{\bar{x}\,\bar{y}}{\sqrt{\bar{x}^2\,\bar{y}^2}}=\frac{\sum_i x_i\,y_i}{\sqrt{\sum_i x_i^2\sum_i y_i^2}} \qquad \text{(J''')}.$$

Наконец, в виду соотношения (J''') условия ортогональности двух векторов будет таково:

$$\sum x_i\,y_i=0 \qquad \text{(K)}.$$

Функциональное пространство.

Работы Гильберта, Фреше, Гаусдорфа и др. положили начало теории функциональных пространств, т. е. абстрактных пространств, элементами которых являются функции от одной числовой переменной реальной, или, вообще говоря, комплексной. Заметим, что в пространстве Гильберта вектор определяется хотя и бесконечным числом компонент, но они представляют собою числа. В функциональном же пространстве роль вектора играет функция одного или даже нескольких аргументов, которые могут изменяться непрерывно. Итак, представим себе функциональное пространство F, в котором некоторая функция $f(x)$ задана в интервале $a\leq x\leq b$, причем в то

ЭР01663

ДВГНБ

время, как аргумент x пробегает непрерывно все значения интервала (a, b), эта функция для каждого значения аргумента будет также непрерывна. Мы будем предполагать, что функция $f(x)$ вместе со своим квадратом интегрируема в данном интервале (a, b).

Значения функции, вообще говоря, будут как вещественные, так и комплексные, но для простоты рассуждения мы будем рассматривать реальные значения функции, если не оговорено противоположное. Мы можем рассматривать функцию $f(x)$, как вектор в пространстве F; этот вектор будет иметь непрерывное множество составляющих. Основные формулы, как-то: выражение длины вектора, скалярного произведения, угла между двумя функциями-векторами в функциональном пространстве определяются аналогично соответствующим формулам общего векторного счисления — только везде суммы заменяются интегралами. Таким образом норм или квадрат длины вектора $f(x)$ можно определить из формулы:

$$Nf(x) = (f, f) = \int_a^b f(x)^2 dx \tag{3}.$$

Функцию, норм которой равен 1, назовем нормированной. Скалярное или внутреннее произведение двух функций будет иметь вид:

$$[f(x)g(x)] = \int_a^b f(x)g(x)dx \tag{4}.$$

Косинус угла между двумя функциями-векторами аналогично формуле (J'''') можно представить так:

$$cs\omega = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx \int_a^b g(x)^2 dx}} \tag{5}.$$

Систему нормированных функций $\varphi_k(x)\,(k = 1, 2, \ldots)$, у которой каждые две различные функции взаимно ортогональны, назовем ортогональной нормированной системой. Для такой системы имеют место соотношения

$$(\varphi_p, \varphi_q) = \int_a^b \varphi_p(x)\varphi_q(x)dx = \delta_{pq} \tag{6},$$

где

$$\delta_{pp} = 1,\ \delta_{pq} = 0,\ \text{если}\ p \neq q \tag{6'}.$$

Соотношения (6′) называют условиями ортогональности.

Если мы станем рассматривать функции действительного переменного, но принимающие комплексные значения, то обычное понятие ортогональности обобщается и характеризуется соотношениями вида:

$$(f, \bar{g}) = (\bar{f}, g) = 0 \tag{7},$$

где $\bar{f}$ и $\bar{g}$ суть обозначения комплексных сопряженных функций относительно f и g. Нормированная функция $f(x)$ в этом случае определяется формулой:

$$Nf = \int_a^b [f]^2 dx = 1 \tag{8}.$$

Заметим, что функции ортогональной системы линейно-независимы. Существуют различные системы ортогональных функций, как-то:

ЭР01663

ЛВГНБ

тригонометрические, полиномы Лежандра, Якоби, Эрмита, Лягерра, Чебышева и некоторые другие. Но мы в этой работе только вкратце коснемся этих функций при рассмотрении собственно уравнения Штурма-Лиувилля.

СВЯЗЬ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ 2-го ПОРЯДКА С ОБЫКНОВЕННЫМ ЛИНЕЙНЫМ УРАВНЕНИЕМ ТОГО ЖЕ ПОРЯДКА.

Весьма много задач математической физики приводится к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных следующей формы:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B\frac{\partial u}{\partial t} + C\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + Eu = 0 \qquad (9),$$

где коэффициенты A и B суть функции только одного переменного t, а C, D и E — функции одного x. Предельные условия, которым должен удовлетворять интеграл уравнения (9), будут таковы:

$$\alpha_1 u(a,t) + \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=b} = 0 \qquad (10),$$

$$\beta_1 u(b,t) + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=b} = 0 \qquad (11).$$

Кроме того, имеют место и начальные условия, а именно:

$$u(x,0) = f(x); \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = F(x) \qquad (12).$$

Будем искать частное решение уравнения (9) в форме

$$u = X(x)T(t) \qquad (13),$$

считая X и T функциями только одного аргумента. Подставляя выражение u в (9), мы получим уравнение:

$$A\frac{T''}{T} + B\frac{T'}{T} = -C\frac{X''}{X} - D\frac{X}{X} - E \qquad (14).$$

Левая часть уравнения (14) зависит только от t, а правая — только от x. Поэтому мы можем приравнять ту и другую часть произвольной постоянной λ. Следовательно, уравнение (14) распадается на два обыкновенных линейных дифференциальных уравнения 2-го порядка:

$$AT'' + BT' - \lambda T = 0 \qquad (15),$$

$$CX'' + DX' + (\lambda + E)K = 0 \qquad (16).$$

Уравнения (15) и (16) представляют большой интерес как в теоретическом, так и практическом отношениях.

Изучение уравнения (16)-го привело исследователей к особой задаче, известной под именем задачи краевых условий. Это же уравнение, приводясь к виду уравнения Штурма-Лиувилля, служит источником для получения различных классов новых функций, каковы, например, функции Бесселя и Лежандра etc. Что же касается уравнения (15), то оно тесно связано с задачей Коши — найти интеграл, удовлетворяющий как предложенному уравнению, так и заданным начальным условиям. Кроме того, оба уравнения (15) и (16)

ЭР01663

ДВГНБ

приводят к другой весьма важной проблеме — к разложению произвольной функции в ряд, расположенный по фундаментальным функциям.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ЧИСЛА И ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ.

Возьмем опять уравнение Штурма-Лиувилля в форме

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]+\left[q(x)+\lambda r(x)\right]y=0 \qquad (1'),$$

где $$p(x)>0,\ q(x)\leqq 0,\ r(x)>0 \qquad (1'').$$

В отношении уравнения (1′) можно поставить такую задачу:

Найти для x, изменяющегося в интервале (a, b), интеграл уравнения (1′), который бы удовлетворял краевым условиям:

$$\alpha, y(a,\lambda)+a_2\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=a}=0, \qquad (1''')$$

$$\beta, y(b,\lambda)+b_2\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=b}=0 \qquad (1^{IV}).$$

Эта задача, будучи однородной, как относительно предложенного дифференциального уравнения, так и относительно краевых условий имеет тривиальное решение $y=0$, которое мы не принимаем в соображение.

Анализ уравнения (1′), однако, показывает, что во многих случаях при условиях (1″) однородная задача допускает такие дискретные вещественные значения параметра λ:

$$\lambda_1<\lambda_2<\ldots,<\lambda_n<\ldots \qquad (1^{V}),$$

для которых она имеет решения и отличные от нуля. Эти значения параметра λ называются характеристическими числами (собственными значениями), а отвечающие им решения уравнения (1′)-го $y_1, y_2, \ldots y_n \ldots$ фундаментальными функциями (собственные функции) данной однородной задачи.

По аналогии с физическим спектром в математике называют „спектром“ коллекции (0) конкретных или абстрактных объектов $0_1, 0_2, 0_3, \ldots$ конечный или бесконечный ряд знаков $m_1, m_2, m_3, \ldots$ соответствующих взаимно однозначно объектам 0_k. Таким образом, совокупность фундаментальных чисел λ_i называется их „спектром“. Если интервал изменяемости x бесконечен, то может случиться, что однородная задача допускает решение при непрерывном изменении параметра λ в этом интервале. В этом случае говорят о существовании „непрерывного спектра“.

ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ УРАВНЕНИЯ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ.

Если в уравнении (1′) положим $y=z\sqrt{p(x)}$, то в нем член, содержащий первую производную, будет отсутствовать. Поэтому можно, не нарушая в нем общности, в нем положить $p(x)=1$ и рассматривать уравнение вида

$$y''+(q+\lambda r)y=0 \qquad (1_1).$$

ЭР01663

ИВГНБ

Пусть y_m и y_k фундаментальные функции, соответствующие характеристическим числам λ_m и λ_k. Тогда имеют место уравнения

$$y''_m + (q + \lambda_m r)y = 0,$$
$$y''_k + (q + \lambda_k r)y = 0,$$

Исключив из этих уравнений q, найдем:

$$y''_m y_k - y''_k y_m = (\lambda_m - \lambda_k) r y_m y_k.$$

Интегрируя обе части последнего равенства в границах a и b, получим

$$(\lambda_m - \lambda_k) \int_a^b r y_m y_k \, dx = (y'_m y_k - y_m y'_k)\Big|_a^b = 0.$$

Так как $\lambda_m - \lambda_k \neq 0$, то, следовательно:

$$\int_a^b r y_m y_k \, dx = 0 \qquad (17),$$

а это и есть аналитическое выражение свойства ортогональности фундаментальных функций.

Если $m = k$, то $\lambda_m = \lambda_k$ и $\int_a^b r y_m^2 \, dx \neq 0$.

Когда

$$\int_a^b r y_m^2 \, dx = 1 \qquad (17'),$$

фундаментальные функции будут не только ортогональны, но и нормальны.

РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В РЯДЫ ПО ФУНДАМЕНТАЛЬНЫМ ФУНКЦИЯМ.

Рассмотрим теперь уравнение (15). Пусть некоторому характеристическому числу $\lambda = \lambda_i$ соответствует два линейно независимых интеграла этого уравнения $T_i^{(1)}$ и $T_i^{(2)}(t)$. Следовательно, общий интеграл уравнения (15) будет иметь вид:

$$T_i(t) = C_i^{(1)} T_i^{(1)}(t) + C_i^{(2)} T_i^{(2)}(t) \qquad (L).$$

Пользуясь произволом констант, их можно записать так:

$$C_i^{(1)} = \frac{A_i}{T_i^{(1)}(0)}, \quad C_i^{(2)} = \frac{B_i}{\left[T_i^{(2)}(0)\right]'} \qquad (M),$$

где

$$\left[T_i^{(2)}(0)\right]' = \frac{dT_i^{(2)}(t)}{dt}\Big|_{t=0} \qquad (M').$$

Только что назначенные решения уравнения (15) можно выбрать таким образом, чтобы имели место начальные условия:

$$T_i^{(2)}(0) = 0, \quad \frac{dT_i^{(1)}(t)}{dt}\Big|_{t=0} = 0. \qquad (N).$$

Следовательно, частный интеграл уравнения (9) примет форму:

$$X_i(x) T_i(t) = \left\{ \frac{A_i}{T_i^{(1)}(0)} T_i^{(1)}(t) + \frac{B_i}{\left[T_i^{(2)}(0)\right]} T_i^{(2)}(t) \right\} X_i(x) \qquad (N').$$

ЭР01663

ЛВГНБ

В силу линейности и однородности уравнения (9) и краевых условий (10) и (11), бесконечная сумма

$$u(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\left\{\frac{A_k}{T_i^{(1)}(0)}T_i^{(1)}(t)+\frac{B_i}{\left[T_i^{(2)}(0)\right]'}T_i^{(2)}(t)\right\}X_i(x) \qquad (18)$$

будет также удовлетворять уравнению (9) и краевым условиям (10) и (11).

Принимая в соображение начальные условия (12), а также соотношения (N), будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} f(x)&=\sum_{i=1}^{\infty}A_iX_i(x) \qquad (19)\\ F(x)&=\sum_{i=1}^{\infty}B_iX_i(x) \qquad (19')\end{aligned}\right\},\ a\leqslant x\leqslant b.$$

Формулы (19) и (19′) представляют собою разложения произвольных функций $f(x)$ и $F(x)$ по фундаментальным функциям; эту задачу мы и имели в виду поставить.

Рассмотрим вкратце еще фундаментальные функции, пользуясь понятием интегрального уравнения.

Возьмем однородное интегральное уравнение типа Фредгольма

$$u_n(x)=\lambda_n\int_a^b K(x,t)u(t)dt \qquad (20).$$

В уравнении (20) ядро обладает свойством симметричности, т. е.

$$K(x,t)=K(t,x) \qquad (21);$$

далее, параметр λ_n — характеристическое число, а $u_n(x)$ соответствующая ему фундаментальная функция. Наряду с уравнением (20) пусть имеет место и такое:

$$u_m(x)=\lambda_m\int_a^b K(x,t)u_m(t)dt \qquad (22),$$

где λ_m и u_m представляют собою другое характеристическое число и соответствующую ему фундаментальную функцию. Умножая уравнение (20) на $\lambda_m u_m(x)$, а (22)-е на $\lambda_n u_n(x)$, проинтегрируем полученные соотношения в границах a и b по переменному x. После вычитания полученных результатов находим:

$$(\lambda_n-\lambda_m)\int_a^b u_n(x)u_m(x)dx=$$

$$=\lambda_m\lambda_n\int_a^b\int_a^b[K(x,t)u_m(t)u_m(x)-K(x,t)u_n(t)u_m(x)]dxdt \qquad (O).$$

Но нетрудно доказать, что правая часть равенства (O) обращается в нуль. В самом деле,

$$\int_a^b\int_a^b K(x,t)u_n(t)u_m(x)dxdt=\int K(x,t)u_n(t)dt\int_a^b u_m(x)dx=$$

$$=\int_a^b K(t,x)u_m(x)dx\int_a^b u_m(t)dt=\int_a^b\int_a^b K(x,t)u_m(t)u_n(x)dxdt \qquad (P).$$

ЭР01663

АБГНВ

На основании соотношения (Р) равенство (О) доставит нам такое:

$$(\lambda_n - \lambda_m)\int_a^b u_n(x)u_m(x)dx = 0 \qquad (23).$$

Так как, согласно условию, λ_n и λ_m различны, то, следовательно:

$$(\lambda_n - \lambda_m)\int_a^b u_n(x)u_m(x)dx = 0 \qquad (23').$$

Таким образом, при наших условиях фундаментальные функции $u_m(x)$ и $u_n(x)$ ядра $K(x,t)$ ортогональны.

Выше мы уже определяли нормальную или нормированную функцию, указав и некоторые свойства функционального пространства. Теперь еще раз коснемся этого понятия с точки зрения теории интегральных уравнений. Если функция ψ нормирована, то она удовлетворяет условию

$$(\psi\psi) = \int_a^b \psi^2(x)dx = 1 \qquad (24).$$

Пусть $\varphi(x)$ функциональная функция, соответствующая характеристическому числу λ_0, т. е.

$$\varphi(x) = \lambda_0 \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt \qquad (25).$$

В таком случае $\psi(x) = C\varphi(x)$ будет также фундаментальной функцией, соответствующей характеристическому числу λ_0. Мы можем теперь распорядиться множителем C так, чтобы имело место условие

$$(\psi\psi) = 1 \qquad (24').$$

Для этой цели нужно положить

$$C^2\int_a^b \varphi^2(x)dx = 1 \qquad (26),$$

отсюда

$$C = \pm\frac{1}{\sqrt{\int_a^b \varphi^2(x)dx}} \qquad (26').$$

Так как $\psi(x) = C\varphi(x)$, то, следовательно:

$$\psi(x) = \frac{\varphi x}{\sqrt{\int_a^b \varphi^2(x)dx}} \qquad (27).$$

Итак, фундаментальная функция $\psi(x)$, удовлетворяя условию (27), будет нормирована.

Что касается разложения произвольной непрерывной функции в равномерно сходящийся ряд в интервале (a,b) по фундаментальным функциям, которые ортогональны и нормальны, непрерывного симметрического ряда, то этот вопрос может быть решен следующим образом.

Пусть

$$f(x) = c_1\psi_1(x) + c_2\psi_2(x) + \ldots \qquad (28).$$

Для определения коэффициентов правой части соотношения (28) воспользуемся формулами (23') и (24'). Умножим обе части равенства (28) на $\psi_n(x)dx$ и проинтегрируем затем полученный результат в границах a и b.

ЭР01663

ДВГНБ

Будем иметь $$c_n = \int_a^b f(x)\psi_n(x)dx \qquad (29).$$

Мы видим, что определение коэффициентов c производится аналогично тому, как это делается в теории рядов Фурье. Формула (28) является обобщением ряда Фурье.

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ РАЗЛИЧНЫХ КЛАССОВ, ПОЛУЧАЕМЫЕ С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЯ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ.

1. Тригонометрические функции.

Возьмем уравнение Штурма-Лиувилля

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + \left[q(x) + \lambda r(x)\right]y = 0 \qquad (1).$$

Положим в этом уравнении $p(x) = 1$, $q(x) = 0$, $r(x) = 1$, $\lambda = k^2$ и промежуток изменяемости переменной x пусть будет (0,1). При этих условиях уравнение (1) примет вид:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = 0 \qquad (30).$$

Фундаментальная система интегралов будет

$$snkx, \qquad cskx$$

Обе последние функции, для которых k целое кратное π, удовлетворяют следующим условиям:

$$\int_0^1 snm\pi x snn\pi x = \begin{cases} 0 \text{ для } & m \neq n, \\ 0 & m = n = 0, \\ \frac{1}{2} & m = n \neq 0, \end{cases}$$

$$\int_0^1 csm\pi x csn\pi x dx = \begin{cases} 0 \text{ для } & m \neq n, \\ 1 & m = 0 = 0, \\ \frac{1}{2} & m = n \neq 0, \end{cases}$$

$$\int_0^1 snm\pi x csn\pi x dx = \begin{cases} 0 \text{ для } & m = 0, \\ 0 \text{ если } & m - n \text{ четное}, \\ \frac{2m}{(m^2 - n^2)\pi} & \text{если } m - n \text{ нечетное}. \end{cases}$$

Заметим еще, что если $\lambda = k^2$, то уравнение $\frac{d^2y}{dx^2} - k^2y = 0$ имеет фундаментальную систему интегралов $shkx$, $chkx$. Для $\lambda = 0$ уравнению $\frac{d^2y}{bx^2} = 0$ соответствует фундаментальная система интегралов 1 и x.

2. Бесселевы функции.

Если мы опять возьмем уравнение Штурма-Лиувилля

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + \left[q(x) + \lambda r(x)\right]y = 0 \qquad (1'),$$

то, полагая в этом уравнении $p(x) = x$, $q(x) = \frac{n^2}{x}$, $r(x) = x$,

ЭР01663

ДВГНБ

получим: $$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+\left(\lambda x-\frac{n^2}{x}\right)y=0 \qquad (31).$$

Примем в уравнении (31)-м $\lambda=p^2$ и разделим затем полученный результат на p^2x, тогда будем иметь

$$\frac{y''}{p^2}+\frac{y'}{p}\cdot\frac{1}{px}+\left(1-\frac{n^2}{p^2x^2}\right)y=0 \qquad (31').$$

Пусть, наконец, $px=t$, тогда уравнение (31′) примет окончательную форму: $$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{1}{t}\frac{dy}{dt}+\left(1-\frac{n^2}{t^2}\right)y=0 \qquad (31'').$$

Уравнение (31″) и есть уравнение Бесселя, а функции, ему удовлетворяющие, называются Бесселевыми или цилиндрическими.

Уравнение (31″), после того, как оно составлено, можно написать и в таком виде:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0 \qquad (32).$$

Чтобы найти частный интеграл уравнения Бесселя, применим метод Фробениуса.

Для этой цели положим[1]

$$y=x^c(a_0+a_1x^2+a_2x^4+\ldots+a_kx^{2k}+\ldots),\ \text{где}\ a_0\neq 0 \qquad (Q).$$

Показатель c определяется из квадратного уравнения, называемого определяющим уравнением; характер c вполне зависит от природы корней квадратного уравнения, которое это c определяет. Внося выражение y, даваемое соотношением (Q), в уравнение Бесселя и приравняв нулю коэффициент при x^{c+2k}, получим для определения коэффициентов a_k такую формулу:

$$a_{k+1}=-\frac{a_k}{(c+2k+2+n)(c+2k+2-n)} \qquad (R).$$

Коэффициент при низшей степени, которая равна $c-2$, будет $(c^2-n^2)a_0$. Поэтому, так как по условию $a_0\neq 0$,

$$c^2-n^2=0 \qquad (33).$$

Таким образом определяющее уравнение (33) дает для c значения n и $-n$. Примем сначала $c=n$, тогда

$$a_{k+1}=-\frac{a_k}{4(n+k+1)(k+1)} \qquad (34).$$

Полагая в последнем равенстве $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, мы найдем

$$a_1=-\frac{a_0}{2^{2k}(n+1)\,!1!},\quad a_2=\frac{a_0}{2^4(n+1)(n+2)2!},\quad \cdots$$

$$a_k=(-1)^k\frac{a_0}{2^{2k}(n+1)(n+2)\ldots(n+k)k!},$$

или $$a_k=2^n\Gamma(n+1)\frac{(-1)^k a_0}{2^{n+2k}\Gamma(n+k+1)\,\Gamma(k+1)} \qquad (S),$$

---

[1] Некоторые авторы, как, напр., Адемар, принимают $y=A_1x^{m_1}+A_2x^{m_2}+A_3x^{m_3}+\ldots$ и затем доказывают, что $m_1=\pm n$, $m_2=m_1+2$, $m_3=m_2+2,\ldots$.

ЭР01663

ЛВНБ

где $\Gamma(n+1)$ — Эйлерова функция гамма, которая, как известно, определяется интегралом:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx \qquad (S').$$

Коэффициент a_0, который до сих пор оставался совершенно произвольным, мы можем выбрать так:

$$2^n \Gamma(n+1) a_0 = 1 \qquad (S'').$$

Поэтому формула для выражения коэффициента общего члена ряда Фробениуса примет форму:

$$a_k = \frac{(-1)^k}{2^{n+2k}\,\Gamma(n+k+1)\,\Gamma(k+1)} \qquad (35).$$

Следовательно, искомое нами частное решение уравнения (32) можно представить следующим образом:

$$y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{\Gamma(n+k+1)\,\Gamma(k+1)} \qquad (36).$$

Это частное решение уравнения Бесселя и называется Бесселевой функцией n-го порядка и 1-го рода; она обозначается символом $J_n(x)$, а иногда и просто J_n.

Ряд (36) сходящийся, в чем можно убедиться на основании признака Даламбера. Возьмем теперь второй корень определяющего уравнения (33)-го $c = -n$. Другое частное решение уравнения (32), отвечающее этому корню, будет таково:

$$y_2 = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}}{\Gamma(-n+k+1)\,\Gamma(k+1)} \qquad (37).$$

Функцию, изображаемую этим рядом и не имеющую других особенностей, кроме $x=0$ и $x=\infty$, обозначают знаком $J_{-n}(x)$ или J_{-n}. Таким образом, в случае n дробного, общий интеграл уравнения Бесселя имеет форму:

$$y = C_1 J_{-n} + C_2 J_{-n} \qquad (38),$$

где C_1 и C_2 — произвольные константы.

Если n целое число, то J_n и J_{-n} будут, как легко доказать, связаны линейной зависимостью между собою, и потому формула (38) уже не представляет общего интеграла уравнения Бесселя. В самом деле, на основании известного свойства функции гаммы, в ряде (37)-м $\Gamma(-n+k+1)$ обратится в бесконечность для $k=0,\ 1,\ 2 \ldots (n-1)$ и тогда n первых членов этого ряда исчезнут. Поэтому мы можем написать следующее соотношение:

$$J_{-n} = \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}}{\Gamma(-n+k+1)\,\Gamma(k+1)} \qquad (38').$$

ЭР01663

ЛВГБ

Заменив в последнем равенстве k через $k+n$, будем иметь:

$$J_{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{n+k}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{\Gamma(n+k+1)\,\Gamma(k+1)}=(-1)^n J_n \qquad (39).$$

Итак, мы видим, что функции J_n и J_{-n} линейно зависимы, что и требовалось доказать. Для получения общего интеграла уравнения Бесселя в том случае, когда n целое число, введем новую функцию $Y_n(x)$, определяемую равенством:

$$Y_n(x)=\frac{J_n(x)\cos n\pi - J_{-n}(x)}{\sin n\pi} \qquad (40).$$

Соотношение (40) получено из (38), где мы приняли $C_1=\frac{\cos n\pi}{\sin n\pi}$ и $C_2=-\frac{1}{\sin n\pi}$. Поэтому функция $Y_n(x)$ также является интегралом уравнения Бесселя.

Но нетрудно доказать, руководствуясь соотношением (39), что при n целом правая часть равенства (40) принимает неопределенный вид. Эту неопределенность можно раскрыть по правилу Лопиталя, принимая n за переменное, стремящееся в пределе к некоторому целому числу. В результате ряда выкладок получим следующее выражение для $Y_n(x)$ или просто Y_n:

$$Y_n=\frac{2}{\pi}J_n\lg\frac{x}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{\Gamma(n+k+1)\,\Gamma(k+1)}\left[\psi(x)+\psi(n+k)\right]-$$
$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma(n-k)}{\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k} \qquad (41),$$

где
$$\psi(z)=\frac{d\lg\Pi(z)}{dz}=\frac{\Pi'(z)}{\Pi(z)}=\frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)} \qquad (42)$$

есть Гауссовское обозначение.

Итак, мы получили второе решение уравнения Бесселя при n целом.

Функция Y_n называется Бесселевой функцией второго рода порядка n; эту функцию называют также функцией Вебера или Шлефли. Следовательно, в случае n целого общий интеграл уравнения Бесселя может быть записан следующим образом:

$$y=c_1J_n+c_2y_n \qquad (43).$$

Ортогональность Бесселевых функций.

Сделаем теперь одно преобразование уравнения Бесселя, которое нам понадобится для установления ортогональности Бесселевых функций. Имеем

$$x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0 \qquad (44).$$

Пусть $y=zf(x)$, тогда уравнение (44) перепишется следующим образом:

$$x^2fz''+(2f'x^2+xf)z'+[x^2f''+xf'+(x^2-n^2)f]z=0 \qquad (T).$$

ЭР01663

ДВГТУ

Выберем множитель $f(x)$ так, чтобы в уравнении (T) уничтожился член, содержащий z', тогда:

$$2x^2f+xf=0 \quad (T') \quad \text{или} \quad 2\frac{f'}{f}+\frac{1}{x}=0, \text{ или } 2\frac{f'}{f}dx+\frac{dx}{x}=0.$$

Интегрируя последнее уравнение и принимая константу равной 1, получим $f=\frac{1}{\sqrt{x}}$. Тогда уравнение (T) после всех упрощений примет форму:

$$z''+\left(1+\frac{4n^2-1}{4x^2}\right)z=0 \qquad (45).$$

Общий интеграл уравнения (45) можно теперь записать так:

$$z=\sqrt{x}\,[C_1J_n(x)+C_2Y_n(x)] \qquad (45').$$

Так как $z=\sqrt{x}\cdot y$, то вместо y можно взять J_n, т. е. положить $z=\sqrt{x}\,J_n$. Но $z=\sqrt{x}\,J_n$ есть частный интеграл уравнения (45). Поэтому имеет место соотношение:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\sqrt{x}\,J_n\right)+\left(1-\frac{4n^2-1}{4x^2}\right)\left(\sqrt{x}\,J_n\right)=0 \qquad (46).$$

Уравнение (45) можно немного преобразовать. Для этой цели положим $x=\alpha t$, тогда уравнение (45) примет вид:

$$\frac{d^2z}{dt^2}+\left(\alpha^2-\frac{4n^2-1}{4t^2}\right)z=0 \qquad (47).$$

В этом случае общий интеграл последнего уравнения представится таким образом:

$$z=\sqrt{\alpha t}\,[C_1J_n(\alpha t)+C_2Y_n(\alpha t)] \qquad (47').$$

Если теперь в выражении общего интеграла уравнения (47) принять $C_2=0$, а $C_1=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ и заменить затем t через x, то

$$u=\sqrt{x}\,J_n(\alpha x) \qquad (U)$$

удовлетворит уравнению

$$u''+\left(\alpha^2-\frac{4n^2-1}{4x^2}\right)u=0 \qquad (48).$$

Аналогично $v=\sqrt{x}\,J_n(\beta x)$ удовлетворит уравнению

$$v''+\left(\beta^2-\frac{4n^2-1}{4x^2}\right)v=0 \qquad (49).$$

Уравнения (48) и (49) можно для краткости записать так:

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\varphi u=0 \qquad (V) \text{ и } \frac{d^2v}{dx^2}+\psi v=0 \qquad (V'),$$

где $$\varphi=\alpha^2-\frac{4n^2-1}{4x^2} \quad \text{и} \quad \psi=\beta^2-\frac{4n^2-1}{4x^2} \qquad (V'').$$

Отсюда следует, что

$$\left[\varphi(u'-uv')\right]_a^b=\int_a^b\left(\psi-\varphi\right)uvdx \qquad (50).$$

ЛВГНБ

Но $$\frac{du}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}J_n(\alpha x)+\alpha\sqrt{x}\,J'_n(\alpha x)$$

и $$\frac{dv}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}J_n(\beta x)+\beta\sqrt{x}\,J'_n(\beta x) \qquad (W).$$

Поэтому формула (50) перепишется следующим образом:

$$(\beta^2-\alpha^2)\int_a^b xJ_n(\alpha x)J_n(\beta x)dx=\Big[x\Big(\alpha J_n(\beta x)J'_n(\alpha x)-\beta J_n(\alpha x)J'_n(\beta x)\Big)\Big]_a^b \qquad (51).$$

Полагая в равенстве (51)-м $a=0$ и $b=1$, получим

$$(\beta^2-\alpha^2)\int_0^a xJ_n(\alpha x)J_n(\beta x)dx=\alpha J_n(\beta)J'_n(\alpha)-\beta J_n(\alpha)J'_n(\beta) \qquad (52).$$

Если α и β корни функции $J(x)$, причем $\beta^2-\alpha^2\neq 0$, то из соотношения (52) находим:

$$\int_0^1 xJ_n(\alpha x)J_n(\beta x)dx=0 \qquad (53).$$

Формула (52) характеризует собою ортогональность функций

$$\sqrt{x}\,J_n(\alpha x) \quad \text{и} \quad \sqrt{x}\,J_n(\beta x).$$

Найдем теперь свойство нормальности Бесселевых функций. Для этой цели разделим обе части формулы (52) на $\beta^2-\alpha^2$; будем иметь:

$$\int_0^1 xJ_n(\alpha x)J_n(\beta x)dx=\frac{\alpha J_n(\beta)J'_n(\alpha)-\beta J_n(\alpha)J'_n(\beta)}{\beta^2-\alpha^2} \qquad (54).$$

Чтобы определить значение интеграла (52) для $\beta=\alpha$, будем рассматривать α как предел переменной величины β. Обозначив правую часть соотношения (54) через H, применим к ней правило Лопиталя. Таким образом находим следующее равенство

$$\lim_{\beta\to\alpha}H=\lim_{\beta\to\alpha}\frac{\alpha J_n(\beta)J'_n(\alpha)-\beta J_n(\alpha)J'_n(\beta)}{\beta^2-\alpha^2}=$$

$$=\lim_{\beta\to\alpha}\frac{\alpha J'_n(\beta)J'_n(\alpha)-J_n(\alpha)J'_n(\beta)-\beta J_n(\alpha)J''_n(\beta)}{2\beta} \qquad (X).$$

Заменяя в предельном результате β через α и предполагая, что α есть корень функции $J_n(x)$, окончательно получим:

$$\int_0^1 xJ^2_n(\alpha x)dx=\frac{J'^2_n(\alpha)}{2} \qquad (55).$$

Нетрудно видеть, что выражение нормированной функции $\varphi_n(x)$ будет таково:

$$\varphi_n(x)=\frac{\sqrt{2x}}{J'_n(\alpha)}J_n(\alpha x) \qquad (56).$$

3. Полиномы Лежандра.

Для нахождения полиномов Лежандра приведем способ, который находится в курсе анализа Гурса (т. I). Для изложения этого способа

ЭР01663

мы вместе с Гурса ставим такую задачу: определить полином n-ой степени P_n таким образом, чтобы

$$\int_a^b P_n Q dx = 0 \qquad (57),$$

где Q произвольный полином степени ниже n.

Пусть $P_n = \frac{d^n R}{dx^n}$ (58), где R полином n-ой степени, причем этот полином не вполне определен, потому что мы можем к уже выбранному полиному R всегда прибавить произвольный полином $(n-1)$-ой степени без изменения производной n-го порядка. Применяя общую формулу интегрирования по частям к интегралу, стоящему в левой части равенства (57), будем иметь:

$$\int_a^b Q \frac{d^n R}{dx^n} dx = \left(Q \frac{d^{n-1} R}{dx^{n-1}} - Q' \frac{d^{n-2} R}{dx^{n-2}} + \ldots \pm R \frac{d^{n-1} Q}{dx^{n-1}} \right)_a^b \qquad (59).$$

Так как Q, по условию произвольно, то следует R выбрать так, чтобы оно и его производные до $(n-1)$-го порядка включительно обращались в нуль для нижней и верхней границы интегрирования. Удовлетворить поставленным нами условиям можно, положив

$$R = C(x-a)^n (x-b)^n \qquad (60).$$

Тогда

$$P_n = C \frac{d^n}{dx^n} \left[(x-a)^n (x-b)^n \right] \qquad (61).$$

Выбираем

$$a = -1, \; b = 1, \; C = \frac{1}{2^n n!} \qquad (62).$$

В таком случае искомый полином выразится следующим образом:

$$X_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \qquad (63).$$

Формула (63) и характеризует собою полином Лежандра; она называется обычно формулой Родрига.

Установленной нами формуле (57) можно теперь придать вид:

$$\int_{-1}^{+1} X_m X_n dx = 0 \qquad (64),$$

где $m \neq n$ и Q положено равным X_m. Соотношение (64) выражает свойство ортогональности Лежандровых полиномов.

Если условимся положить $X_0 = 1$, то будем иметь:

$$X_0 = 1, \; X_1 = x, \; X_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \; X_3 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \ldots \qquad (65).$$

Из уравнения (63) можно вывести и другое следствие, а именно: многократное применение теоремы Ролля показывает, что n корней полинома X_n реальны, различны и лежат между -1 и $+1$. Если n четное, то корни X_n попарно равны по абсолютной величине и противоположны по знаку. Если же n нечетное, то один корень полинома X_n равен нулю, а остальные ведут себя, как в случае n четного.

Найдем теперь нормированные многочлены Лежандра. Для этой

ЭР01663

ДВГНБ

цели вычислим посредством многократного интегрирования по частям интеграл

$$\int_{-1}^{+1} X_n^2\,dx = \frac{1}{2^{2n}\,n!^2}\int_{-1}^{+1} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\,\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\,dx \qquad (65).$$

Обозначим на время для краткости $(x^2-1)^n$ через u. Тогда, применяя несколько раз формулу интегрирования по частям, получим:

$$\int_{-1}^{+1} u^{(n)}u^{(n)}dx = u^{(n-1)}u^{(n)} - u^{(n-2)}u^{(n+1)} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1}uu^{(2n-1)} + (-1)^n\int_{-1}^{+1} uu^{(2n)}dx \qquad (66).$$

Так как все внеинтегральные члены уничтожаются при границах интегрирования, то формула (66) заменится более простою, а именно:

$$\int_{-1}^{+1} X_n^2\,dx = \frac{(-1)^n}{2^{2n}\,n!^2}\int_{-1}^{+1}(x^2-1)^n\,\frac{d^{2n}(x^2-1)^n}{dx^{2n}}\,dx \qquad (67).$$

Простым дифференцированием легко убедиться в том, что

$$\frac{d^{2n}(x^2-1)^n}{dx^{2n}} = (2n)! \qquad (68).$$

Поэтому

$$\int_{-1}^{+1} X_n^2\,dx = \frac{(-1)^n\cdot(2n)!}{2^{2n}\,n!^2}\int_{-1}^{+1}(x^2-1)^n\,dx \qquad (69).$$

Далее, имеем

$$\int_{-1}^{+1}(x^2-1)^n\,dx \int_{-1}^{+1}(x+1)^n(x-1)^n\,dx =$$

$$= -\frac{n}{n+1}\int_{-1}^{+1}(x-1)^{n-1}(1+x)^{n+1}\,dx = \ldots =$$

$$= (-1)^n\frac{n!}{(n+1)(n+2)\ldots 2n}\int_{-1}^{+1}(x+1)^{2n}\,dx =$$

$$= (-1)^n\frac{n!2^{2n+1}}{(n+1)(n+2)\ldots 2n(2n+1)} \qquad (70).$$

В силу соотношения (70) формула (69) примет вид:

$$\int_{-1}^{+1} X_n^2\,dx = \frac{(2n)!n!2^{2n+1}}{2^{2n}\,n!^2(n+1)(n+2)\ldots(2n+1)} = \frac{2}{2n+1} \qquad (71).$$

Таким образом нормированные многочлены Лежандра принимают следующую форму:

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,X_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\cdot\frac{1}{2^n\,n!}\,\frac{d^n(x^2-1)}{dx^n} \qquad (72).$$

Рекуррентная формула.

Три последовательных полинома X_{n-1}, X_n, X_{n+1} связаны линейною зависимостью, которую мы намерены установить. Для нашей

ЭР01663

ДВГНБ

цели найдем предварительно значение $X_n(1)$. Применим формулу Лейбница, чтобы выразить производную n-го порядка от $(x+1)^n(x-1)^n$. Имеем

$$X_n = C\left[(x+1)^n\frac{d^n(x-1)^n}{dx^n} + n\frac{d(x+1)^n}{dx}\cdot\frac{d^{n-1}(x-1)^n}{dx^{n-1}} + \ldots\right] \quad (73),$$

где $C = \frac{1}{2^n n!}$. Подставив в формулу (73) вместо x единицу и заметив, что все члены выражения, стоящего в квадратных скобках, кроме первого, исчезнут благодаря присутствию множителя $x-1$, мы и получим желаемое значение X_n (1).

В самом деле, упомянутый 1-й член нашего выражения обратится в $2^n n!$ Следовательно,

$$X_n(1) = C\cdot 2^n n! = 1 \quad (74).$$

Из формулы (73) следует также, что $X_n(-1) = (-1)^n$ (74′).

Заметим теперь, что всякий полином n-ой степени всегда может быть выражен посредством линейной комбинации полиномов Лежандра X_0, X_1, ..., X_n. Действительно, пусть этот полином будет M_n, тогда имеет место равенство

$$M_n = C_0X_n + C_1X_{n-1} + \ldots + C_nX_0 \quad (75').$$

Уравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x в левой и правой части равенства (75)-го, мы получим систему $n+1$ линейных уравнений относительно констант C_0, C_1, ..., C_n. Эти уравнения и дадут нам значения неопределенных коэффициентов C_0, C_1,... C_n. Следовательно, мы можем написать:

$$xX_n = C_0X_{n+1} + C_1X_n + C_2X_{n-1} + C_3X_{n-2} + \ldots + C_{n+1}X_0 \quad (76).$$

Для определения коэффициентов C_0, C_1, ... воспользуемся свойством ортогональности полиномов Лежандра.

Имея в виду формулы (57), (64) и (71), умножим обе части равенства 76 на X_{n-2} и проинтегрируем полученный результат в границах -1 и $+1$. Тогда будем иметь соотношение

$$C_3\int_{-1}^{+1} X_{n-2}^2 dx = 0 \quad (77).$$

откуда следует, что $C_3 = 0$. Совершенно аналогично найдем, что $C_4 = 0$, $C_5 = 0$, ..., $C_{n+1} = 0$. Далее коэффициент C_1 также есть нуль, потому что, в силу структуры полиномов Лежандра, произведение xX_n не содержит члена, содержащего x^n.

В результате наших рассуждений равенство (76) упростится и запишется под видом:

$$xX_n = C_0'X_{n+1} + C_2X_{n-1} \quad (78).$$

Остается только определить коэффициенты C_0 и C_2. Для этой цели нужно в соотношении (78) приравнять сначала коэффициенты при x^{n+1}, а затем, определив C_0, подставить в это соотношение вместо x единицу; последняя операция и даст нам, наконец, величину C_2.

Но $X_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}n+1!}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^2-1)^{n+1}$, и потому коэффициент при x^{n+1} в правой части равенства (78) будет

ЭР01663

$$C_0 \cdot \frac{(2n+2)(2n+1)\ldots(n+2)}{2^{n+1}\,n+1!} = C_0 \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}(n+1)!^2}.$$

Легко также видеть, что коэффициент при x^{n+1} в левой части равенства (78) будет

$$\frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}{2^n\,n!} = \frac{(2n)!}{2^n\,n!^2}.$$

Итак, $\frac{(2n)!}{2^n\,n!^2} = C_0 \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}(n+1)!^2}$ (X), отсюда $C_0 = \frac{n+1}{2n+1}$.

Точно так же при замене x единицей в соотношении (78) найдем

$$1 = \frac{n+1}{2n+1} + C_2, \text{ отсюда } C_2 = \frac{n}{2n+1}.$$

Зная C_0 и C_2, мы получим и желательную для нас рекуррентную формулу:

$$(n+1)X_{n+1} - (2n+1)xX_n + nX_{n-1} = 0 \quad (79).$$

Это соотношение, между прочим, позволяет по двум данным Лежандровым полиномам найти третий.

Производящая функция.

Предложим себе разложить радикал

$$(1-2xz+z^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (Y)$$

в ряд по возрастающим степеням z. Это выражение можно записать так: $\left[1+(2xz-z^2)\right]^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{2xz-z^2}{2} + \frac{3}{8}(2xz-z^2)^2 + \ldots$ (80).

Соединив вместе все члены, которые содержат одну и ту же степень z, получим разложение вида:

$$(1-2xz+z^2)^{-\frac{1}{2}} = P_0 + P_1 z + P_2 z^2 + \ldots + P_n z^n + \ldots \quad (81).$$

Легко видеть, что

$$P_0 = 1,\ P_1 = x,\ P_2 = \frac{1}{2}(3x^2-1), \ldots \quad (81');$$

P_n — полином n-ой степени от x.

Найдем теперь рекуррентное соотношение между P_{n-1}, P_n и P_{n+1}.

Дифференцируя соотношение (81) относительно z, имеем:

$$(x-z)(1-2xz+z^2)^{-3/2} = P_1 + 2P_2 z + \ldots + nP_n z^{n-1} + \ldots \quad (Z).$$

На основании соотношения (81) равенству (Z) можно придать форму:

$$(x-z)(P_0 + P_1 z + \ldots + P_n z^n + \ldots) = (1-2xz+z^2)\cdot$$
$$\cdot(P_1 + 2P_1 z + \ldots + nP_n z^{n-1} + \ldots) \quad (82).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z в формуле (82), найдем

$$xP_n - P_{n-1} = (n+1)P_{n+1} - 2nxP_n + (n-1)P_{n-1},$$

или окончательно

$$(n+1)P_{n+1} - (2n+1)xP_n + nP_{n-1} = 0 \quad (83).$$

ЭР01663

Но это соотношение идентично (79)-му и кроме того $P_0 = X_0$, $P_1 = X_1$, $P_2 = X_2$. Поэтому $P_n = X_n$ при всяком n. Следовательно, формула (81) становится

$$(1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + X_1 z + X_2 z^2 + \ldots + X_n z^n + \ldots \qquad (84),$$

где общий полином Лежандра

$$X_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1) \qquad (84').$$

Функцию Y называют производящей функцией полиномов Лежандра. Считаем нелишним дать еще способ Лиувилля для нахождения константы C [равенства (62)]. Положим

$$X_n = H_n \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \qquad (85).$$

По формуле Лейбница имеем, как и выше,

$$X_n = H_n \left[(x+1)^n \frac{d^n (x-1)^n}{dx^n} + n \frac{d(x+1)^n}{dx} \frac{d^{n-1}(x-1)^n}{dx^{n-1}} + \ldots \right] \qquad (85').$$

Выполняя в квадратных скобках равенства (85') дифференцирование и заменяя затем в полученном результате x единицей, найдем, что

$$X_n(1) = 2^n n! H_n \qquad (85'').$$

С другой стороны для $x = 1$ радикал $(1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}}$ приводится к $(1 - z)^{-1}$, т. е. к $1 + z + z^2 + \ldots$. Поэтому $X_n(1) = 1$.

Следовательно,

$$H_n = C = \frac{1}{2^n n!}.$$

Свойство ортогональности Лежандровых полиномов дает возможность разложить произвольную однозначную функцию $f(x)$, когда аргумент ее изменяется в интервале $(-1, +1)$, в ряд по полиномам Лежандра. Поэтому, если функция изображается рядом:

$$f(x) = C_0 X_0 + C_1 X_1 + C_2 X_2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n X_n \qquad (86),$$

то коэффициенты C_n определяются равенствами

$$C_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) X_n(x) dx \qquad (86').$$

ДРУГАЯ ФОРМА ПРОИЗВОДЯЩЕЙ ФУНКЦИИ.

Обозначая расстояние между двумя точками через d, радиусы-векторы, соответствующие этим точкам, через 1 и r и угол между радиусами-векторами через θ, будем иметь:

$$\frac{1}{d} = (1 - 2r\cos\theta + r^2)^{-\frac{1}{2}} \qquad (87).$$

Нетрудно теперь видеть, что

$$1 - 2r\cos\theta + r^2 = 1 - re^{\theta i} - re^{-\theta i} + r^2 e^{\theta i} e^{-\theta i} =$$
$$= 1(1 - re^{\theta i}) - re^{-\theta i}(1 - re^{\theta i}) = (1 - re^{-\theta i})(1 - re^{-\theta i}).$$

Выражение (87) примет, следовательно, вид:

$$(1 - 2r\cos\theta + r^2)^{-\frac{1}{2}} = (1 - re^{\theta i})^{-\frac{1}{2}} (1 - re^{-\theta i})^{-\frac{1}{2}} \qquad (87').$$

ЭР01663

ДВГНБ

Но, согласно условию, $-1<r<1$. Поэтому

$$\frac{1}{d}=\left(1+\frac{1}{2}re^{i\theta}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}r^2e^{2i\theta}+\ldots\right)\left(1+\frac{1}{2}re^{-i\theta}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}r^2e^{-2i\theta}+\ldots\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(cs\theta)r^n \qquad (88)$$

Из (88)-го соотношения следует:

$$\left(1-2rcs\theta+r^2\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\left(\frac{1}{2}re^{-i\theta}+\frac{1}{2}re^{i\theta}\right)+$$

$$+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}r^2e^{-i\theta}+\frac{1}{4}r^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}r^2e^{2i\theta}\right)+$$

$$+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}r^3e^{-3i\theta}+\frac{1\cdot 3}{16}r^3e^{-i\theta}+\frac{1\cdot 3}{16}r^3e^{i\theta}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}r^3e^{3i\theta}\right)+\ldots \qquad (89)$$

По упрощении формула (89) запишется следующим образом:

$$\left(1-2rcs\theta+r^2\right)^{-\frac{1}{2}}=1+rcs\theta+\frac{1}{4}r^2\left(3cs2\theta+1\right)+$$

$$+\frac{1}{8}r^3\left(5cs3\theta+3cs\theta\right)+\ldots \qquad (89')$$

Поэтому соответствующие полиномы Лежандра будут иметь такую форму:

$$P_0(cs\theta)=1,\ P_1(cs\theta)=cs\theta,\ P_2(cs\theta)=\frac{1}{4}(3cs2\theta+1),\ P_3(cs\theta)=\frac{1}{8}(5cs3\theta+3cs\theta$$

. . . . . .

и вообще

$$P_n(cs\theta)=2\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\left\{csn\theta+\frac{1n}{1\cdot(2n-1)}cs(n-2)\theta+\right.$$

$$\left.+\frac{1\cdot 3\cdot n(n-1)}{1\cdot 2(2n-1)(2n-3)}cs(n-4)\theta+\ldots\right\} \qquad (90)$$

Дифференциальное уравнение Лежандра.

Возьмем общее выражение полинома Лежандра

$$X_n=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

и положим $$z=(x^2-1)^n \qquad (91)$$

Логарифмическая производная от обеих частей подстановки (91) доставит нам:

$$\frac{z'}{z}=\frac{2nx}{x^2-1} \qquad (91'),\ \text{или}\ (x^2-1)z'=2nxz \qquad (92)$$

Дифференцируя соотношение (92) при помощи формулы Лейбница $(n+1)$ раз сряду, получим:

$$(x^2-1)z^{(n+2)}+2(n+1)xz^{(n+1)}+n(n+1)z^{(n)}=$$

$$=2nxz^{(n+1)}+2n(n+1)z^{(n)} \qquad (93)$$

ЭР01663

ЛВГНБ

Упрощая формулу (93), находим:

$$(x^2-1)z^{(n+2)}+2xz^{(n+1)}-n(n+1)z^{(n)}=0 \qquad (93').$$

Полагая $z^{(n)}=y$, перепишем искомое уравнение под видом:

$$(x^2-1)y''+2xy'-n(n+1)y=0 \qquad (93'').$$

Легко теперь видеть, что полином X_n представляет собою частное решение уравнения Лежандра (93″). Уравнение (93″) можно последовательно написать так:

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n(n+1)y=0 \qquad (94)$$

или

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+n(n+1)y=0 \qquad (94').$$

Таким образом, уравнение Лежандра есть частный случай общего уравнения Штурма-Лиувилля:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]+\left[q(x)+\lambda r(x)\right]y=0 \qquad (1').$$

Чтобы перейти от общего уравнения Штурма-Лиувилля к уравнению Лежандра, нужно сделать следующие положения:

$$p(x)=1-x^2,\ q(x)=0,\ r(x)=1,\ \lambda=n(n+1) \qquad (95).$$

Критическими точками уравнения (94) являются $x=-1$ и $x=+1$.

Интегрирование уравнения Лежандра.

Выше мы уже нашли частный интеграл уравнения Лежандра. Это решение было $X_n=P_n$. Постараемся теперь найти общий интеграл уравнения Лежандра. Для этой цели ищем интегралы этого уравнения в форме степенных рядов. Пусть

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+\ldots \qquad (96).$$

Подставляя выражение (96) в уравнение (94), будем иметь:

$$\begin{aligned}&[n(n+1)a_0+2a_2]+[n(n+1)a_1-2a_2+2\cdot 3a_3]x+\\&+[n(n+1)a_2-4a_2-2a_2+3\cdot 4a_4]x^2+\\&+[n(n+1)a_3-2\cdot 3a_3+4\cdot 5a_5]x^3+\\&+[n(n+1)a_4-2\cdot 4a_4-3\cdot 4a_4+5\cdot 6a_6]x^4+\ldots\\&\ldots+[n(n+1)a_k-2ka_k-(k-1)ka_k+\\&+(k+1)(k+2)a_{k+2}]x^k+\ldots=0 \qquad (97).\end{aligned}$$

Приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях в равенстве (97), мы получим соотношения вида:

$$a_{k+2}=\frac{(k-n)(n+k+1)}{(k+1)(k+2)}a_k \qquad (98).$$

Таким образом, останутся неопределенными два коэффициента a_0 и a_1.

Из соотношения (98) видно, что когда $k=n$, то $a_{k+2}=0$, и вообще a_{k+4}, a_{k+6}, ... нули. Но, как видно из той же формулы, a_{k+1}, a_{k+3}, ... отличны от нуля.

Следовательно, если n целое четное число, то число четных степеней обрывается на том члене, который содержит x^n; число же не-

ЭР01663

четных степеней бесконечно. Если же n целое нечетное число, то наоборот, число нечетных степеней обрывается на том члене, который содержит x^n, а число четных степеней будет бесконечно.

Итак, общий интеграл уравнения Лежандра можно написать в такой форме:

$$y = a_0\left(1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}x^4 \ldots\right) +$$

$$+ a_1 x\left(1 - \frac{(n-1)(n-2)}{3!}x^2 + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!}x^4 + \ldots\right) =$$

$$= a_0 p_n(x) + a_1 q_n(x) \qquad (99).$$

Как было только что сказано, если n целое четное число, то конечным является полином $p_n(x)$; если же n целое нечетное число, то конечным будет полином $q_n(x)$.

Обычно общий интеграл уравнения Лежандра представляют в таком виде:

$$y = AP_n(x) + BQ_n(x) \qquad (100).$$

В соотношении (100):

$$P_n = \left(-1\right)^{\frac{n}{2}} \frac{1 \cdot 3 \ldots (n-1)}{2 \cdot 4 \ldots n} p_n \qquad (101) \quad \text{(для } n \text{ четного)},$$

$$P_n = \left(-1\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1 \cdot 3 \ldots n}{2 \cdot 4 \ldots (n-1)} q_n \qquad (101') \quad \text{(для } n \text{ нечетного)};$$

$$Q_n = \left(-1\right)^{\frac{n}{2}} \frac{2 \cdot 4 \ldots n}{1 \cdot 3 \ldots (n-1)} q_n \qquad (102) \quad \text{(для четного } n\text{)},$$

$$Q_n = \left(-1\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{2 \cdot 4 \ldots (n-1)}{1 \cdot 3 \ldots n} p_n \qquad (102') \quad \text{(для нечетного } n\text{)}.$$

В четырех последних равенствах функция $P_n(x)$ называется шаровою функцией 1-го рода, а функция $Q_n(x)$ — шаровою функцией 2-го рода.

Мы дали общий интеграл уравнения Лежандра в виде суммы двух частных интегралов, представленных рядами, расположенными по восходящим степеням x. Найдем теперь решение уравнения Лежандра в форме рядов, расположенных по нисходящим степеням x.

Положим, что это решение будет

$$y = A_1 x^{m_1} + A_2 x^{m_2} + A_3 x^{m_3} + \ldots \qquad (103),$$

причем, согласно условию, $m_1 > m_2 > m_3 > \ldots$

В результате подстановки выражения y в уравнение (94), получим:

$$[n(n+1) - m_1(m_1-1) - 2m_1]A_1 x^{m_1} +$$
$$+ [n(n+1) - m_2(m_2-1) - 2m_2]A_2 x^{m_2} +$$
$$+ [n(n+1) - m_3(m_3-1) - 2m_3]A_3 x^{m_3} + \ldots$$
$$\ldots + m_1(m_1-1)A_1 x^{m_1-2} + m_2(m_2-1)A_2 x^{m_2-2} +$$
$$+ m_3(m_3-1)A_3 x^{m_3-2} + \ldots = 0.$$

ЭР01663

РБГНБ

Последнее равенство по упрощении перепишется следующим образом:

$$[m_1(m_1+1)-n(n+1)A_1x_1^{m_1}+[m_2(m_2+1)-n(n+1)]A_2x^{m_2}+$$
$$+[m_3(m_3+1)-n(n+1)]A_3x^{m_3}+\ldots-m_1(m_1-1)A_1x^{m_1-2}-$$
$$-m_2(m_2-1)A_2x^{m_2-2}-\ldots=0 \qquad (104).$$

Чтобы старший член $(m_1-n)(m_1+n+1)A_1x^{m_1}$ уничтожился, необходимо положить

$$(m_1-n)(m_1+n+1)=0,$$

отсюда $$m_1=n,\ m_1=-(n+1) \qquad (105).$$

Следующие члены наиболее высокой степени

$$(m_2-n)(m_2+n+1)A_2x^{m_2}-m_1(m_1-1)A_1x^{m_1-2}$$

должны взаимно уничтожиться, что может иметь место при условии:

$$m_2=m_1-2 \text{ и } (m_2-n)(m_2+n+1)A_2=m_1(m_1-1)A_1 \qquad (106).$$

Далее

$$m_3=m_2-2=m_1-4 \text{ и } A_3=\frac{m_2(m_2-1)}{(m_3-n)(m_3+n+1)}A_2 \qquad (107),$$

и вообще

$$m_2=m_1-2(r-1) \text{ и } A_r=\frac{m_{r-1}(m_{r-1}-1)}{(m_r-n)(m_r+n+1)}A_{r-1} \qquad (108).$$

Остановимся сначала на первом решении (105), т. е. $m_1=n$, тогда получим такие соотношения:

$$A_2=-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}A_1,\quad A_3=-\frac{(n-2)(n-3)}{4(2n-3)}A_2=$$
$$=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot4(2n-1)(2n-3)}A_1,\ \ldots \qquad (109).$$

А потому решение, соответствующее 1-му случаю $(m_1=n)$, будет

$$y_1=A_1\left[x^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2}+\right.$$
$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4}-\ldots\right] \qquad (110).$$

При n целом и положительном ряд обрывается и дает полином n-ой степени. Если

$$A_1=\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{n!},$$

то получим шаровую функцию $P_n(x)$.

Рассмотрим, наконец, второе решение (105), т. е. $m=-(n+1)$.

Соответствующий 2-му случаю частный интеграл выразится рядом:

$$y_2=A_1\left[x^{-(n+1)}+\frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}x^{-(n+3)}+\right.$$
$$\left.+\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2\cdot4(2n+3)(2n+5)}x^{-(n+5)}+\ldots\right] \qquad (111).$$

Ряд, стоящий в квадратных скобках равенства (111), будет сходиться для $|x|>1$.

ЭР01663

ДВГНБ

Если принять $A_1 = \frac{2^n n!^2}{(2n+1)!}$, то y_2 обозначается через $Q_n(x)$ и называется шаровой функцией второго рода.

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА.

Кроме литературы, указанной в тексте, мы пользовались еще следующими источниками:

1. R. Courant und D. Hilbert, Methoden der Mathematischen Physik, I, 1924 a.
2. E. Madelung, Die Mathematischen Hilfsmittel des Physikers, 1925 a.
3. L. Bieberbach, Differential gleichungen, 1926 a.
4. Riemann-Weber, Die partiellen Differ. Gleichung. der mathem. Physik, 1925 a.
5. C. Jordan, Cours d'Analyse, t. II, 1894 a.
6. H. Laurent, Traité d'Analyse, t. V, 1890 a.
7. Vivanti-Schwank, Lineare Integral-Gleichungen, 1929 a.
8. T. Lalesco, Introduction à la théorie des équat. intégr., 1912 a.
9. W. Lovitt, Linear Integr. Equat., 1924 a.
10. В. А. Стеклов. Основы теор. интегр. обыкн. диф. ур., 1927 г.
11. Д. М. Синцов. Интегр. обыкн. диф. ур., 1913 г.
12. Б. М. Коялович. Лекции по высш. матем., т. II, в. 2, 1924 г.
13. В. А. Фок. Математ. аппарат теор. Шредингера, 1927 г.
14. Уиттекер и Ватсон. Курс совр. анал., т. I и II, 1933-4 гг.
15. А. Н. Крылов. О некоторых диф. уравнен. математ. физики, 1932 г.
16. Н. С. Кошляков. Основные диф. уравн. математич. физики, 1933 г.
17. В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. II, 1931 г.
18. Р. О. Кузьмин. Бесселевы функции, 1935 г.
19. Вебстер и Сеге. Диф. уравнения в частн. производных математической физики, ч. I и II, 1933-34 гг. (перев. с немецкого).
20. Горт. Дифференциальные уравнения, 1933 г. (перев. с немецк.).

ДВГУ

ЭР01663

ДВ ГОС. УНИВЕРСИТЕТ, УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ I, 1937
FAR EASTERN STATE UNIVERSITY, SCIENTIFIC STUDIES, VOL. I, 1937

С. П. Слугинов.

О ДИСКРИМИНАНТЕ КУБИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ.

SUR LE DISCRIMINANT DE L'ÉQUATION CUBIQUE.

Par S. P. Slouguinoff.

1. В геометрии обычно пользуются таким определением дискриминанта: дана целая однородная функция k переменных; образуем все производные данной функции относительно каждой переменной, входящей в состав этой функции; результат исключения переменных из уравнений только что составленных и называется дискриминантом функции.

Заметим, что если дискриминант первой части однородного уравнения

$$f(x,y)=a_0x^n+a_1x^{n-1}y+\ldots+a_ny^n=0$$

равен нулю, то оно имеет, по крайней мере, два равных корня.

2. В качестве примера на нахождение дискриминанта алгебраического уравнения возьмем сначала квадратное уравнение

$$x^2+px+q=0 \qquad (1).$$

Напишем это уравнение в однородной форме, а именно:

$$f(x,y)=x^2+pxy+qy^2=0.$$

Дискриминант квадратного уравнения (1) и будет результат исключения x и y из уравнений:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=2x+py=0,\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=px+2qy=0\end{aligned}\right\} \qquad (2).$$

Чтобы теснее связаться с уравнением (1), можно положить в уравнениях (2)-ых $y=1$ и исключить x из получившихся таким образом уравнений.

Итак, дискриминант D_2 уравнения (1)-го примет вид:

$$D_2=\begin{vmatrix}2 & p\\ p & 2q\end{vmatrix}=4q-p^2=0.$$

ЭР01663

3. Перейдем теперь к рассмотрению кубического уравнения в его приведенной форме и применим найденный нами способ для получения дискриминанта этого уравнения.

Имеем $$x^3+px+q=0 \qquad (3).$$

Уравнение (3), взятое в однородной форме, будет таково:

$$f(x,y)=x^3+pxy+qy^3=0 \qquad (4).$$

Составим уравнения:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=3x^2+py^2=0,\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=2pxy+3qy^2=0\end{aligned}\right\} \qquad (5).$$

К уравнениям (5) присоединим еще одно уравнение, которое найдем следующим образом. Умножив уравнение (4) на x^3, получим:

$$F(x,y)=x^6+px^4y^2+qx^3y^3=0 \qquad (6).$$

Отсюда $F'_{xy}=2px^2.\ xy+3q(xy)^2=0$ или $2px^2+3qxy=0 \qquad (7).$

Система уравнений (5) и (7) линейная и однородная относительно x^2, y^2 и xy, которые мы принимаем за различные неизвестные.

Результат исключения из этой системы неизвестных x^2, y^2 и xy и доставит нам выражение дискриминанта D_3 кубического уравнения (3), т. е.

$$D_3=\begin{vmatrix}3 & 0 & p\\ 2p & 3q & 0\\ 0 & 2p & 3q\end{vmatrix}=27q^2+4p^3=0 \qquad (8).$$

Можно также найти дискриминант уравнения (3), положив в уравнениях (5) и (7)-м $y=1$ и исключив затем из получившихся уравнений x^2 и x.

ДВГНБ

ЭР01663

ДВ ГОС. УНИВЕРСИТЕТ, УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ I, 1937
FAR EASTERN STATE UNIVERSITY, SCIENTIFIC STUDIES, VOL. I, 1937

Е. Н. Лыгин.

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ИНТЕГРАЛАХ СТИЛЬТЬЕСА К КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ.

APPLICATIONS DES ÉQUATIONS INTÉGRALES AUX INTÉGRALES DE STIELTJES SUR LES PROBLÈMES DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.

Par E. N. Lyguin.

I.

Настоящая работа имеет предметом приложение интегральных уравнений Фредгольма в интегралах Стильтьеса к некоторым краевым задачам дифференциальных уравнений обыкновенных и в частных производных. Гильберт в своих "Grundzüge" показал, как решаются многие краевые задачи дифференциальных уравнений с однородными краевыми условиями при помощи интегральных уравнений Фредгольма в обыкновенных интегралах. Гюнтер в своем основном мемуаре об интеграле Стильтьеса (Sur les intégrales de Stieltjes et leurs applications aux problèmes de la physique mathématique) решил одну краевую задачу, в которой краевые условия содержали параметр; при чем решение привелось к интегральному уравнению уже в интегралах Стильтьеса. Так здесь займемся подобными задачами.

Условимся в обозначениях. Греческими буквами (ξ), (η), (ζ), ... будем обозначать области одного или двух измерений, которые вообще являются подобластями соответствующих областей (D_x), (D_y), (D_z),...; причем одна из координат точек, изменяющихся в (ξ), будет x, одна из координат точек (η) будет y, и т. д. Меру области будем обозначать той же буквой без скобок, а точку будем называть по ее одной координате.

Ядро $K(\xi,y)$ рассматриваемых интегральных уравнений будет функцией области (ξ) и точки y, причем оно имеет следующую форму:

$$K(\xi,y)=\frac{1}{\xi}\int_{(\xi)} w(\sigma)K(s,y)d\sigma \qquad (1),$$

где s координаты точек области (σ), $w(\sigma)$ — положительная среднеаддитивная $\mathcal{K}$ ограниченной вариацией функция области, абсолютно непрерывная в (D_s), за исключением точек в конечном числе;

ЭР01663

ТВГУ

$K(x,y)$ симметричная и непрерывная функция своих аргументов в (D_x) и (D_y). Такие ядра подходят под общий тип ядер, изученных Гюнтером в указанном мемуаре; поэтому здесь не будем указывать всех свойств подобных ядер, а только отметим из известных свойств необходимые для последующего, причем некоторые свойства придется отметить и доказать впервые. Как правило, в этой работе все известные уже положения приводятся без доказательств и доказательства помещены только для тех положений, которые отмечаются впервые, хотя бы эти доказательства и не представляли особых затруднений.

Ядро $K(\xi,y)$ будет симметричным относительно $w(\xi)$, т. е. будет выполняться соотношение

$$\frac{1}{\xi}\int\limits_{(\xi)} w(\sigma)K(\eta,s)d\sigma = \frac{1}{\eta}\int\limits_{(\eta)} w(\tau)K(\xi,t)d\tau \qquad (2),$$

где (ξ) принадлежит (D_x) и (η) принадлежит (D_y).

Отметим, что, очевидно, будет иметь место и обратное положение, именно, если $K(\xi,y)$ удовлетворяет соотношению (2) и имеет форму (1), то $K(x,y)$ будет симметричной функцией своих аргументов. Действительно, применяя теорему о среднем к соотношению (2), будем иметь

$$w(\xi)K(\eta,x') = w(\eta)K(\xi,y'),$$

где x' — точка в (ξ) и y' — точка в (η). Подставляя сюда $K(\xi,y)$ из (1) и снова применяя теорему о среднем, получим $K(y'',x') = K(x'',y')$, где опять x'' — точка в (ξ) и y'' точка в (η). Переходя к пределу при $\xi \to 0$, $\eta \to 0$, установим $K(y,x) = K(x,y)$.

Резольвента $\Gamma(\lambda;\xi,y)$ ядра (1) для (ξ) в (D_x) и y в (D_y) получается в виде частного двух целых относительно λ функций, представленных рядами по степеням λ. Именно

$$\Gamma(\lambda;\xi,y) = \frac{D(\frac{\xi}{y}\,|\,\lambda)}{D(\lambda)},$$

где

$$D(\tfrac{\xi}{y}\,|\,\lambda) = K(\xi,y) - \lambda\int\limits_{(D_{s_1})}\begin{vmatrix} K(\xi,y), & K(\xi,s_1)\\ K(\sigma_1,y), & K(\sigma_1,s_1)\end{vmatrix} d\sigma_1 +$$

$$+\frac{\lambda^2}{2!}\int\limits_{(D_{s_1})}\int\limits_{(D_{s_2})}\begin{vmatrix} K(\xi,y), K(\xi,s_1), K(\xi,s_2)\\ K(\sigma_1,y), K(\sigma_1,s_1), K(\sigma_1,s_2)\\ K(\sigma_2,y), K(\sigma_2,s_1), K(\sigma_2,s_2)\end{vmatrix} d\sigma_1 d\sigma_2 - \ldots,$$

$$D(\lambda) = 1 - \lambda\int\limits_{(D_{s_1})} K(\sigma_1,s_1)d\sigma_1 + \frac{\lambda^2}{2!}\int\limits_{(D_{s_1})}\int\limits_{(D_{s_2})}\begin{vmatrix} K(\sigma_1,s_1), K(\sigma_1,s_2)\\ K(\sigma_2,s_1), K(\sigma_2,s_2)\end{vmatrix} d\sigma_1 d\sigma_2 - \ldots,$$

т. е. известные определители Фредгольма. Будут иметь место:

$$\Gamma(\lambda;\xi,y) - K(\xi,y) = \lambda\int\limits_{(D_s)} K(\xi,s)\Gamma(\lambda;\sigma,y)d\sigma,$$

$$\Gamma(\lambda;\xi,y) - K(\xi,y) = \lambda\int\limits_{(D_s)} \Gamma(\lambda;\xi,s)K(\sigma,y)d\sigma.$$

Полюса резольвенты ядра, удовлетворяющего условию (2), будут действительные и простые, причем резольвента имеет по меньшей мере один полюс.

ЭР01663

Если полюс $\lambda=\lambda_i$ резольвенты будет n-кратным корнем уравнения $D(\lambda)=0$, то такому полюсу соответствует n линейно независимых фундаментальных функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$,..., $\varphi_n(x)$ ядра $K(\xi, y)$, т. е. таких, которые тождественно не равны нулю в (D_x) и удовлетворяют уравнению:

$$\varphi(x)=\lambda_i \int\limits_{(D_y)} K(\eta, x)\varphi(y)d\eta \tag{3}.$$

Столько же указанному полюсу λ_i будет соответствовать фундаментальных функций $\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi),..., \varphi_n(\xi)$ союзного уравнения, т. е. уравнения

$$\varphi(\xi)=\lambda_i \int\limits_{(D_y)} K(\xi, y)\varphi(\eta)d\eta.$$

Между этими фундаментальными функциями будет существовать следующая связь:

$$\varphi_m(\xi)=\frac{1}{\xi}\int\limits_{(\xi)} w(\sigma)\varphi_m(s)d\sigma \tag{4}.$$

Выпишем последовательность всех корней $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ уравнения $D(\lambda)=0$, расположенных, допустим, в порядке возрастания их абсолютных величин, положительные впереди отрицательных при равенстве абсолютных величин, причем каждый корень написан столько раз, какова его кратность; в таком же порядке выпишем им соответствующие фундаментальные функции уравнения (3) и союзного.

Тогда $$\int\limits_{(D_x)} \varphi_m(\xi)\varphi_n(x)d\xi=0, \text{ при } m\neq n \tag{5},$$

что на основании (4) может быть записано так

$$\int\limits_{(D_x)} w(\xi)\varphi_m(x)\varphi_n(x)d\xi=0, \text{ при } m\neq n \tag{5'}.$$

Систему фундаментальных функций будем предполагать нормальной, т. е.

$$\int\limits_{(D_x)} w(\xi)\varphi_m^2(x)d\xi=1.$$

Для того, чтобы доказать теорему о возможности разложения произвольной функции в ряд по фундаментальным функциям, докажем следующее положение.

Теорема. *Всякая функция, ортогональная в (D_x) ко всем фундаментальным функциям ядра (1), будет ортогональной и к самому ядру.*

Действительно, возьмем уравнение:

$$\varphi(x)=\lambda \int\limits_{(D_y)} K(\eta, x)\varphi(y)d\eta+f(x) \tag{6}$$

и предположим, что $f(x)$ ортогональная в (D_x) ко всем фундаментальным функциям ядра $K(\xi, y)$, т. е.

$$\int\limits_{(D_x)} w(\xi)f(x)\varphi_m(x)d\xi=0, \quad m=1, 2, 3, \ldots$$

ЭР01663

Докажем теперь, что $f(x)$ ортогональна с ядром $K(\xi, y)$, т. е.

$$\int_{(D_x)} K(\xi, y) f(x) d\xi = 0.$$

Так как полюса резольвенты простые, то в окрестности полюса λ_i разложение резольвенты в ряд по степеням $\lambda - \lambda_i$ будет иметь вид

$$\Gamma(\lambda; \xi, y) = \frac{N_i(\xi, y)}{\lambda - \lambda_i} + P_i(\lambda; \xi, y) \qquad (7),$$

где $N_i(\xi, y)$ от λ не зависит, а $P_i(\lambda; \xi, y)$ — правильная часть, содержащая только положительные степени $\lambda - \lambda_i$. Если (7) подставим в указанные уже соотношения, связывающие резольвенту с ядром, то получим:

$$\frac{N_i(\xi, y)}{\lambda - \lambda_i} + P_i(\lambda; \xi, y) - K(\xi, y) = \lambda \int_{(D_s)} \left\{ \frac{N_i(\xi, s)}{\lambda - \lambda_i} + P_i(\lambda; \xi, s) \right\} K(\sigma, y) d\sigma,$$

$$\frac{N_i(\xi, y)}{\lambda - \lambda_i} + P_i(\lambda; \xi, y) - K(\xi, y) = \lambda \int_{(D_s)} K(\xi, s) \left\{ \frac{N_i(\sigma, y)}{\lambda - \lambda_i} + P_i(\lambda; \sigma, y) \right\} d\sigma.$$

Приравнивая коэффициенты при $\frac{1}{\lambda - \lambda_i}$, получим:

$$N_i(\xi, y) = \lambda_i \int_{(D_s)} K(\sigma, y) N_i(\xi, s) d\sigma \quad \text{и} \quad N_i(\xi, y) = \lambda_i \int_{(D_s)} K(\xi, s) N_i(\sigma, y) d\sigma;$$

это будет показывать, что $N_i(\xi, y)$ будет линейной комбинацией фундаментальных функций ядра $K(\xi, y)$, соответствующих полюсу λ_i. Так как $f(x)$ ортогональна ко всем фундаментальным функциям, то она будет ортогональной к $N_i(\xi, y)$ и так как на основании общей теории интегральных уравнений решение уравнения (6) дается в форме

$$\varphi(x, \lambda) = \lambda \int_{(D_y)} \Gamma(\lambda; \eta, x) f(y) d\eta + f(x),$$

то в окрестности полюса λ_i оно будет принимать вид

$$\varphi(x, \lambda) = \lambda \int_{(D_y)} P_i(\lambda; \eta, x) f(y) d\eta + f(x),$$

т. е. оно будет голоморфным в окрестности полюса λ_i. Таким образом мы видим, что $\varphi(x, \lambda)$ будет голоморфной в окрестности всех полюсов $\Gamma(\lambda; \xi, y)$, но она голоморфна и в окрестности других точек, следовательно, $\varphi(x, \lambda)$ будет голоморфной функцией для всех λ.

С другой стороны, предположим, что $f(x)$ не ортогональна к ядру $K(\xi, y)$. Тогда возьмем для решения уравнения (6) форму:

$$\varphi(x, \lambda) = f(x) + \lambda \int_{(D_y)} K(\eta, x) f(y) d\eta +$$

$$+ \lambda^2 \int_{(D_y)} K_2(\eta, x) f(y) d\eta + \lambda^3 \int_{(D_y)} K(\eta, x) f(y) d\eta + \ldots \qquad (8),$$

где $K_n(\xi, y)$ — n-ое повторное ядро. Предположим, что ряд (8) равномерно сходящийся для всех λ, т. е., что функция $\varphi(x, \lambda)$ голоморфная для всех λ. Предполагая $f(\xi)$ интегрируемой, умножим почленно ряд (8) на $f(\xi)$ и проинтегрируем; вновь полученный ряд

ЭР01663

$$\int_{(D_x)} \varphi(x, \lambda) f(\xi,) d\xi = c_0 + \lambda c_1 + \lambda^2 c_2 + \lambda^3 c_3 + \ldots \qquad (8')$$

должен быть тоже равномерно сходящимся, где

$$c_n = \int_{(D_x)} \int_{(D_y)} K_n(\eta, x) f(y) f(\xi) d\eta d\xi.$$

Но пользуясь условием (2) и возможными операциями с интегралами Стильтьеса, приведем c_{2n} к виду:

$$c_{2n} = \int_{(D_x)} \int_{(D_y)} K_{2n}(\eta, x) f(y) f(\xi) p\xi d\eta =$$

$$= \int_{(D_x)} \int_{(D_y)} \int_{(D_s)} K_n(\eta, s) K_n(\sigma, x) f(y) f(\xi) d\xi d\eta d\sigma =$$

$$= \int_{(D_x)} \int_{(D_y)} \int_{(D_s)} K_n(\eta, s) K_n(\sigma, x) f(y) w(\xi) f(x) d\xi d\eta d\sigma =$$

$$= \int_{(D_x)} \int_{(D_y)} \int_{(D_s)} K_n(\eta, s) f(y) \left\{ \frac{1}{\xi} \int_{(\xi)} w(\tau) K_n(\sigma, t) d\tau \right\} f(x) d\xi d\eta d\sigma =$$

$$= \int_{(D_x)} \int_{(D_y)} \int_{(D_s)} K_n(\eta, s) f(y) \left\{ \frac{1}{\sigma} \int_{(\sigma)} w(\tau) K_n(\xi, t) d\tau \right\} f(x) d\xi d\eta d\sigma =$$

$$= \int_{(D_x)} \int_{(D_y)} \int_{(D_s)} w(\sigma) K_n(\eta, s) f(y) K_n(\xi, s) f(x) d\xi d\eta d\sigma =$$

$$= \int_{(D_s)} w(\sigma) \left\{ \int_{(D_x)} K_n(\xi, s) f(x) d\xi \right\}^2 d\sigma,$$

$$c_{2n} = \int_{(D_s)} w(\sigma) \left\{ \int_{(D_x)} K_n(\xi, s) f(x) d\xi \right\}^2 d\sigma \qquad (9),$$

при этом принято, что (D_x) и (D_y) тождественны между собой, только по первой пробегает x, а по второй y.

Следовательно c_{2n} положительное и, кроме того, отсюда легко сделать заключение, что $f(x)$ не может быть ортогональной к какому-либо из повторных ядер, не будучи ортогональной к $K(\xi, y)$.

Теми же операциями, как в предыдущем, можно еще получить:

$$c_{2n}^2 = \left(\int_{(D_x)} \int_{(D_y)} \int_{(D_s)} w(\sigma) K_{n-1}(\xi, s) K_{n+1}(\eta, s) f(x) f(y) d\xi d\eta d\sigma \right)^2 =$$

$$= \left(\int_{(D_s)} w(\sigma) \cdot \int_{(D_x)} K_{n-1}(\xi, s) f(x) d\xi \cdot \int_{(D_y)} K_{n+1}(\eta, s) f(y) d\eta \cdot d\sigma \right)^2.$$

Применяя неравенство Шварца, будем иметь:

$$c_{2n}^2 \leqslant \int_{(D_s)} w(\sigma) \left\{ \int_{(D_x)} K_{n-1}(\xi, s) f(x) d\xi \right\}^2 d\sigma \cdot$$

$$\cdot \int_{(D_s)} w(\sigma) \left\{ \int_{(D_y)} K_{n+1}(\eta, s) f(y) d\eta \right\}^2 d\sigma$$

и по (9) $\quad c_{2n}^2 \leqslant c_{2n-2} \cdot c_{2n+2}$ или $\quad \frac{c_{2n+2}}{c_{2n}} \geqslant \frac{c_{2n}}{c_{2n-2}}.$

Последнее показывает, что ряд (8′), а с ним и ряд (8) не может быть сходящимся для всех λ; но последнее противоречит тому, что

ЭР01663

мы получили в начале доказательства — функция $\varphi(x, \lambda)$, в случае ортогональности $f(x)$ ко всем фундаментальным функциям ядра должна быть голоморфной для всех λ.

Следовательно, ядро $K(\xi, y)$ не может быть не ортогональным к $f(x)$, что и доказывает теорему.

Не для всех ядер возможно разложение произвольной функции по его фундаментальным функциям, так здесь предположим, что ядро $K(\xi, y)$ является замкнутым, т. е. таким, что каждая функция $f(x)$, ортогональная к нему в (D_x), иначе, удовлетворяющая соотношению

$$\int_{(D_x)} K(\xi, y)f(x)d\xi = \int_{(D_x)} w(\xi)K(x, y)f(x)d\xi = 0,$$

тождественно равна нулю в (D_x).

Легко установить, что замкнутому и удовлетворяющему соотношению (1) ядру соответствует бесконечно много фундаментальных функций, ибо, были бы фундаментальные функции в конечном числе, тогда можно было бы найти отличную от нуля функцию линейно от них независимую и к ним ортогональную. По доказанной теореме, она была бы ортогональной к ядру, что противоречит его замкнутости.

Система фундаментальных функций замкнутого ядра является замкнутой системой, т. е. нет функции, отличной от нуля в (D_x), линейно независимой от фундаментальных функций и всем им ортогональной, что устанавливается как предыдущее.

Теперь можно доказать основную теорему Гильберта-Шмидта для наших ядер.

Теорема. *Всякая непрерывная в (D_x) функция $f(x)$ и могущая быть представленной в виде*

$$f(x) = \int_{(D_x)} K(\eta, x)g(y)d\eta,$$

где $g(y)$ некоторая, подходящим образом подобранная интегрируемая в квадрате функция, может быть разложенной в ряд по фундаментальным функциям ядра $K(\xi, y)$:

$$f(x) = f_1 \cdot \varphi_1(x) + f_2 \cdot \varphi_2(x) + f_3 \cdot \varphi_3(x) + \dots \qquad (10),$$

где

$$f_n = \int_{(D_x)} w(\xi)f(x)\varphi_n(x)d\xi, \qquad n = 1, 2, 3, \dots \qquad (11);$$

Причем ряд (10) сходится абсолютно и равномерно.

Сходимость ряда (10) абсолютная и равномерная установлена Гюнтером в указанном мемуаре. Здесь мы отметим только, что можно установить сходимость ряда (10) именно к функции $f(x)$, если предположить ядро $K(\xi, y)$ замкнутым.

Действительно, обозначим тогда сумму ряда (10) через $S(x)$ и через $R(x)$ — разность между $f(x)$ и $S(x)$, т. е. $R(x) = f(x) - S(x)$. Тогда по (11) и (5′) $R(x)$ будет ортогональной ко всем фундаментальным функциям замкнутого ядра и, следовательно, тождественно равной нулю; следовательно $f(x) = S(x)$.

II.

Перейдем теперь к приложениям теории интегральных уравнений, подобных предыдущим, к решению краевых задач дифференциаль-

ЭР01663

ных уравнений. Покажем здесь, как знание функции Грина для основных типов однородных граничных условий будет достаточным для решения краевых задач, имеющих уже как в самом уравнении, так и в граничных условиях параметр, т. е. для решения проблемы Штурма-Лиувилля в том случае, когда, наряду с уравнением, параметр входит и в граничные условия.

Будем рассматривать самосопряженное дифференциальное выражение 2-го порядка

$$L(u) \equiv \frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) + qu \tag{1},$$

где $p(x)$ — положительная непрерывно дифференцируемая функция, в интервале от a до b, $q(x)$ — непрерывная функция в том же интервале.

Пусть (ξ) — замкнутый интервал от α до β, составляющий часть интервала от a до b. Положим

$$\left.\begin{aligned} w(\xi) &= 1 + \frac{z(a)}{\xi}, \text{ если } \alpha = a, \\ w(\xi) &= 1, \text{ если } \alpha > a \text{ и } \beta < b, \\ w(\xi) &= 1 + \frac{z(b)}{\xi}, \text{ если } \beta = b, \end{aligned}\right\} \tag{2},$$

при этом $z(x) \geqslant 0$ для $x = a$ или $x = b$.

Тогда, очевидно, для двух функций $u(x)$ и $v(x)$ можно установить соотношение, подобное формуле Грина:

$$\int_a^b w(\xi)\left\{vL(u) - uL(v)\right\}d\xi = \left[p(x)\left(v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}\right)\right]_a^b + \left[z(x)\left\{vL(u) - uL(v)\right\}\right]_a^b \tag{3}.$$

Однородные граничные условия возьмем следующие:

I. $\alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = 0$, $\beta_1 > 0$; $\alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0$, $\beta_2 > 0$.
II. $u(a) + hu(b) + \alpha_1 u'(b) = 0$, $\alpha_1 > 0$; $\alpha_2 u(a) + hp(a)u'(a) + p(b)u'(b) = 0$.
III. $p(a)u'(a) + \alpha_1 u(b) - hp(b)u'(b) = 0$, $h > 0$;
$-hu(a) + \alpha_2 u'(a) + u'(b) = 0$.
IV. $u(a) + \alpha_1 u(b) + p(b)u'(b) = 0$; $\alpha_2 u(a) + hp(a)u'(a) - hu(b) = 0$, $h > 0$.
V. $u(a) + \alpha_1 u(b) - p(a)u'(a) + p(b)u'(b) = 0$; $p(a)u'(a) - u(a) = 0$.

Наряду с ними напишем им соответствующие граничные условия, содержащие параметр λ:

I.* $(\alpha_1 + \lambda\gamma_1)u(a) + \beta_1 u'(a) = 0$, $\gamma_1 \geqslant 0$; $(\alpha_2 + \lambda\gamma_2)u(b) + \beta_2 u'(b) = 0$, $\gamma_2 \geqslant 0$.
II.* $u(a) + hu(b) + \alpha_1 u'(b) = 0$;
$(\alpha_2 + \lambda\gamma)u(a) + hp(a)u'(a) + p(b)u'(b) = 0$, $\gamma \geqslant 0$.
III.* $p(a)u'(a) + (\alpha_1 + \lambda\beta_1)u(b) - hp(b)u'(b) = 0$, $\beta_1 \geqslant 0$;
$-hu(a) + \alpha_2 u'(a) + u'(b) = 0$.
IV.* $u(a) + (\alpha_1 - \lambda\beta_1)u(b) + p(b)u'(b) = 0$, $\beta_1 \geqslant 0$;
$(\alpha_2 + \lambda\beta_2)u(a) + hp(a)u'(a) - hu(b) = 0$, $p_2 \geqslant 0$.
V.* $u(a) + (\alpha_1 - \lambda\beta_1)u(b) - p(a)u'(a) + p(b)u'(b) = 0$, $\beta \geqslant 0$;
$p(a)u'(a) - u(a) = 0$.

Коэффициенты h, α_1, β_1,... в условиях I—V и I*—V* вообще произвольные, за исключением тех моментов, которые указаны, причем

ЭР01663

ДВГНБ

в условиях с одинаковыми нумерами эти коэффициенты имеют одинаковое ограничение.

Функция $w(\xi)$ определяется, как указано в (2), причем соответственно граничным условиям.

I* — V* будет определяться так:

$$\text{I}^{**} \qquad z(a)=\frac{\gamma_1 p(a)}{\beta_1}, \qquad z(b)=\frac{\gamma_2 p(b)}{\beta_2}.$$

$$\text{II}^{**} \qquad z(a)=\frac{\gamma}{\alpha_1}, \qquad z(b)=0.$$

$$\text{III}^{**} \qquad z(a)=0, \qquad z(b)=\frac{\beta_1}{h}.$$

$$\text{IV}^{**} \qquad z(a)=\frac{\beta_2}{h}, \qquad z(b)=\beta_1.$$

$$\text{V}^{**} \qquad z(a)=0, \qquad z(b)=\beta_1.$$

Наряду с $L(u)$ будем рассматривать еще

$$\Lambda(u)\equiv L(u)+\lambda u\equiv\frac{d}{dx}\left(p\frac{dx}{dx}\right)+qu+\lambda u \tag{4}$$

Возьмем еще уравнение

$$L[f(x)]+\varphi(x)=0 \tag{5}$$

где $\varphi(x)$ непрерывная в (a, b) функция.

Положим теперь в формуле Грина (3) $u=K(x, s)$ — функции Грина дифференциального выражения $L(u)$ для одного из условий I—V, а $v=f(x)$ — функции, удовлетворяющей уравнению (5) и соответственному условию из I*—V*, функцию $w(\xi)$ выберем также соответственной по (2) и одному из I**—V**; тогда получим, произведя необходимые преобразования:

$$f(x)=\int_a^b w(\eta)K(x, y)\varphi(y)d\eta+[z(y)\{\lambda f(y)-\varphi(y)\}\dot{K}(y, x)]_{y=a}^{y=b} \tag{6}$$

Потом положим в формуле (3) $u=K(x,s)$ — функции Грина для дифференциального выражения $L(u)$ и одного из условий I—V, $v=\Gamma(\lambda; v, s^*)$ — функции Грина дифференциального выражения $\Lambda(u)$ для соответственного из условий I*—V*, причем функция $w(\xi)$ также взята подходящей; получим

$$\lambda\int_a^b w(\xi)K(x, s)\Gamma(\lambda; x, s^*)d\xi=\Gamma(\lambda; s^*, s)-K(s, s^*)$$

или

$$\lambda\int_a^b K(\xi, s)\Gamma(\lambda; \sigma^*, x)d\xi=\Gamma(\lambda; \sigma^*, s)-K(\sigma^*, s) \tag{7}$$

где

$$K(\sigma^*, s)=\frac{1}{\sigma^*}\int_{(\sigma^*)} w(\xi)K(x, s)d\xi, \quad \Gamma(\lambda, \sigma^*, s)=\frac{1}{\sigma^*}\int_{(\sigma^*)} w(\xi)\Gamma(\lambda; x, s)d\xi \tag{8}$$

Имея эти соотношения, можем сформулировать следующие две теоремы:

Теорема 1. *Если имеем дифференциальное уравнение* $L[f(x)]+\varphi(x)=0$ *— (5), где* $\varphi(x)$ *— данная непрерывная в интервале от a до b*

ЭР01663

функция, то решение его, удовлетворяющее одному из условий I—V*, будет иметь вид*

$$f(x)=\int_a^b w(\eta)K(x,y)\varphi(y)d\eta+[z(y)\{\lambda f(y)-\varphi(y)\}K(y,x)]_{y=a}^{y=b} \qquad (6),$$

*где $K(x, y)$ — функция Грина дифференциального выражения $L(u)$ для подходящего из условий I—V, и функция $w(\xi)$ подходящая из (2) и I**—V**.*

Наоборот, интегральное уравнение (6) будет иметь одно и только одно решение, данное формулой (5).

На основании этой теоремы и соотношения (7) формулируем такую теорему:

Теорема 2. *Дифференциальное уравнение*

$$\Lambda(u)=L(u)+\lambda u=0$$

при одном из граничных условий I—V* будет иметь характеристические числа и фундаментальные функции, совпадающие с характеристическими числами и фундаментальными функциями интегрального уравнения*

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b w(\eta)K(y,x)\varphi(y)d\eta+f(x),$$

где $K(x, y)$ — функция Грина дифференциального выражения $L(u)$ для подходящих граничных условий из I—V.

Резольвента последнего интегрального уравнения будет равна функции Грина дифференциального выражения $\Lambda(u)$ для подходящих граничных условий из I—V*.*

Если не существует функции Грина, удовлетворяющей условиям I—V, тогда можно взять $\psi(x)$ — решение уравнения $L(u)=0$, удовлетворяющее соответственным условиям, образовать функцию $K_1(x, s)$, которая удовлетворяет уравнению $L(u)=p(s)\psi(x)\psi(s)$ и соответственному условию из I—V, и такую, что ее первая производная имеет скачок при $x=s$ равный -1; потом положим

$$K(x,s)=\frac{K_1(x,s)}{p(s)},$$

которая будет удовлетворять уравнению

$$L(u)=\psi(x)\psi(s).$$

В формуле (3) положим

$$u=K(x,s),\ v=f(x),$$

где $f(x)$ удовлетворяет уравнению $L[f(x)]+\varphi(x)=0$ и подходящему условию из I*—V*.

Тогда $$f(s)=\int_a^b w(\xi)\{f(x)\psi(x)\psi(s)+K(x,s)\varphi(x)\}d\xi+$$

$$+[z(x)\{\lambda f(x)-\varphi(x)\}K(x,s)]_{x=a}^{x=b}-[z(x)f(x)\psi(x)\psi(s)]_{x=a}^{x=b}$$

и, следовательно, если $\psi(x)$ подобрано так, что

$$\int_a^b f(x)\psi(x)dx=0,$$

то в силе останутся теоремы 1 и 2.

ЭР01663

Что фундаментальные функции интегрального уравнения, отмеченного в теореме 1, будут удовлетворять соответственным граничным условиям, проверяется непосредственными вычислениями.

Можно заметить, что ядро этого интегрального уравнения на основании (8) будет иметь вид, указанный в разделе I по (1). Больше того, ядро последнего интегрального уравнения будет замкнутым, ибо, если функция $\varphi(x)$ будет ортогональной к ядру $K(\xi, y)$, то положим эту функцию $\varphi(x)$ в (6), тогда $\varphi(x)$ должна удовлетворять (5), но мы увидим, что $\varphi(x)$ там сводится к нулю. Следовательно, $\Delta(u)=0$ имеет бесконечно много фундаментальных функций, отвечающих одному из I*—V* и образующих ортогональную и замкнутую систему,

$$\int_a^b w(\xi)\varphi_m(x)\varphi_n(x)d\xi = \begin{matrix} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{matrix}$$

На основании теоремы 1 можно условие представимости функции в виде

$$f(x)=\int_a^b w(\eta)K(x, y)g(y)d\eta$$

заменить тем, что функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируемая в интервале от a до b.

На основании этого и изложенного в разделе I получим:

Теорема 3. *Всякую функцию $f(x)$, дважды непрерывно дифференцируемую в интервале от a до b, можно разложить в бесконечный ряд по фундаментальным функциям уравнения*

$$L(u)+\lambda u=0,$$

отвечающим одному из граничных условий I—V*:*

$$f(x)=f_1\cdot\varphi_1(x)+f_2\cdot\varphi_2(x)+f_3\cdot\varphi_3(x)+\ldots,$$

где

$$f_i=\int_a^b w(\xi)f(x)\varphi_i(x)d\xi, \quad i=1, 2, 3, \ldots,$$

причем ряд будет равномерно и абсолютно сходящимся.

Рассмотрим соответственную задачу для дифференциальных уравнений в частных производных.[1]

Пусть $L(u)$ самосопряженное дифференциальное выражение 2-го порядка эллиптического типа

$$L(u)\equiv\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial u}{\partial y}\right)+qu \qquad (9),$$

где $p(xy)$ — непрерывно дифференцируемая, положительная функция внутри площади Ω и на контуре C, ограничивающем эту площадку; $q(xy)$ — непрерывная функция в Ω и на C. Пусть уравнение кривой C будет $x=x(s)$, $y=y(s)$, где функции $x(s)$ и $y(s)$ непрерывные и имеют непрерывные производные за исключением точек в конечном числе; s — длина дуги по кривой C от некоторого начала на C.

Граничные условия будем рассматривать следующих видов:

I. $\alpha_1 u+\beta_1\frac{\partial u}{\partial n}=0$ на кривой C,

где $\frac{\partial u}{\partial n}$ — производная по внутренней нормали.

[1] Заметим, что здесь не будет выдержано условленное обозначение.

ЭР01663

II. $(\alpha_1 + 2\pi\lambda\alpha_2)u + \beta_1 \frac{\partial u}{\partial n} = 0$ на кривой C,

α_2 и β_1 одинаковых знаков, в остальном α_1, α_2 и β_1 произвольные.

Пусть (ω_i) замкнутая площадка внутри Ω.

Образуем функцию $w(\omega_i)$:

$$w(\omega_i) = 1,$$

если для всех точек, лежащих внутри и на границе (ω_i), имеет место хотя одно из неравенств $x \neq x(s)$, $y \neq y(s)$ и

$$w(\omega_i) = 1 + \frac{\alpha_1}{\beta_1} \frac{p(x_i\, y_i)}{\omega_i} \delta_i ,$$

если внутри или на границе (ω_i) имеются точки, для которых $x = x(s)$, $y = y(s)$; δ_i — наибольшее расстояние между такими точками в (ω_i), ω_i — мера (ω_i), $(x_i\, y_i)$ — точка внутри (ω_i).

Если возьмем $u_m(xy)$ и $u_n(xy)$ — две функции, удовлетворяющие условиям II и дифференциальному уравнению

$$\Delta(u) \equiv L(u) + 2\pi\lambda u = 0 \qquad (10),$$

то тогда

$$\int_{\Omega} w(\omega) u_m(xy) u_n(xy) d\omega = 0, \quad m \neq n \qquad (11).$$

Это будет верным, если покажем, что для любого разбиения Ω на (ω_i), $i = 1, 2, \ldots$ будет иметь место

$$\int_C p(xy) u_m(xy) u_n(xy) ds = \lim_{\substack{n=\infty \\ \omega i = 0}} \sum_{i=1}^{n} p(x_i\, y_i) u_m(x_i\, y_i) u_n(x_i\, y_i) \delta_i ,$$

где сумма распространена на все взаимно не налегающие малые области (ω_i) и покрывающие кривую C [всякая точка кривой принадлежит одной из таких (ω_i) и хотя бы для одной точки (ω_i) имеет место $x = x(s)$, $y = y(s)$]; $(x_i\, y_i)$ — некоторая точка внутри (ω_i). Но это будет сразу очевидным, если заметим, что

$$\int_C p u_m u_n \, ds$$

есть тоже предел суммы, слагаемые которой определяются различными, но определенными разбиениями кривой C на элементы $\triangle s_i$; так это разбиение возьмем совпадающим с тем, которое произведено областями (ω_i). Тогда $\triangle s_i = \delta_i$ и ввиду непрерывности $p u_m u_n$ будет видно, что сумма, определяющая интеграл (12), и сумма, стоящая в правой части равенства (12), будут иметь один и тот же предел при $\omega_i = 0$.

Так же установим формулу, подобную формуле Грина:

$$\int_{\Omega} w(\omega) \left\{ vL(u) - uL(v) \right\} d\omega =$$

$$= \int_C p(xy) \left\{ \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) + \frac{\alpha_2}{\beta_1} \left[vL(u) - uL(v) \right] \right\} ds \qquad (13),$$

где $u(xy)$ и $v(xy)$ некоторые непрерывные функции и $\frac{\partial u}{\partial n}$, $\frac{\partial v}{\partial n}$ производные по внутренней нормали кривой C.

ЭР01663

РГНБ

Пусть

$$L[f(xy)] + 2\pi\lambda\varphi(xy) = 0 \qquad (14),$$

где $\varphi(xy)$ — непрерывная внутри Ω и на C функция.

Положим в (13)

$$v = f(xy)$$

— функции, удовлетворяющей уравнению (14) и граничному условию II:

$$u = K(xy, \xi\eta)$$

— функции Грина дифференциального выражения $L(u)$ для граничного условия I.

Тогда

$$f(\xi\eta) = \int_{\Omega} w(\omega)K(xy, \xi\eta)\varphi(xy)d\omega + \frac{\alpha_2}{\beta_1}\int_{C} p(xy)(\lambda f - \varphi)K(xy, \xi\eta)ds \qquad (15).$$

Если же в формуле (13) положим

$$u = K(xy, \xi\eta)$$

указанному,

$$v = \Gamma(\lambda; xy, \xi^*\eta^*)$$

функции Грина дифференциального выражения $\Lambda(u) \equiv L(u) + 2\pi\lambda u$ для краевого условия II, то получим:

$$\lambda\int_{\Omega} w(\omega)K(xy, \xi\eta)\Gamma(\lambda; xy, \xi^*\eta^*)d\omega = \Gamma(\lambda; \xi\eta, \xi^*\eta^*) - K(\xi^*\eta^*, \xi\eta),$$

или, вводя обозначения

$$\left.\begin{aligned} K(\omega, \xi\eta) &= \frac{1}{\omega}\int_{(\omega)} w(\omega)K(xy, \xi\eta)d\omega \\ \Gamma(\lambda; \omega, \xi\eta) &= \frac{1}{\omega}\int_{(\omega)} w(\omega)\Gamma(\lambda; xy, \xi\eta)d\omega \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

и пользуясь симметрией функций Грина, будем иметь

$$\Gamma(\lambda; \sigma^*, \xi\eta) - K(\sigma, \xi\eta) = \lambda\int_{\Omega} K(\omega, \xi\eta)\Gamma(\lambda; \sigma^*, xy)d\omega \qquad (17).$$

Соотношения (15) и (17) полностью теперь переносят теоремы 1, 2 и 3 на дифференциальные уравнения

$$\Lambda(u) = 0$$

при граничных условиях II, которые сформулируем так:

Теорема 4. *Если имеем дифференциальное уравнение*

$$L[f(xy)] + 2\pi\varphi(xy) = 0 \qquad (18),$$

где $\varphi(xy)$ непрерывная в Ω и на C функция, то решение, удовлетворяющее граничному условию II, будет удовлетворять интегральному уравнению:

$$f(\xi\eta) = \int_{\Omega} w(\omega)K(xy, \xi\eta)\varphi(xy)d\omega + \frac{\alpha_2}{\beta_1}\int_{C} p(xy)(\lambda f - \varphi)K(xy, \xi\eta)ds \qquad (19),$$

где $K(xy, \xi\eta)$ — функция Грина дифференциального выражения $L(u)$ для граничных условий I, функция $w(\omega)$ будет иметь вышеуказанный вид.

Наоборот, интегральное уравнение (19), рассматривая в нем $f(xy)$ данной, будет иметь одно и только одно решение, данное формулой (18).

ЭР01663

ДВГНБ

Теорема 5. *Дифференциальное уравнение*

$$\Lambda(u) \equiv L(u) + 2\pi\lambda u = 0$$

при граничных условиях II будет иметь характеристические числа и фундаментальные функции, совпадающие с характеристическими числами и фундаментальными функциями интегрального уравнения

$$\varphi(xy) = \lambda \int_{\Omega} w(\sigma) K(xy, \xi\eta) \varphi(\xi\eta) d\sigma + f(xy),$$

где $K(xy, \xi\eta)$ *— функция Грина дифференциального выражения* $L(u)$ *для граничных условий I.*

Резольвента последнего интегрального уравнения будет равна функции Грина дифференциального выражения $\Lambda(u)$ *для граничных условий II.*

Теорема 6. *Всякую функцию* $f(xy)$*, дважды непрерывно дифференцируемую по* x *и по* y *в области* Ω *и на ее контуре C, можно разложить в бесконечный ряд по фундаментальным функциям уравнения* $L(u) + 2\pi\lambda u = 0$*, отвечающим граничным условиям II:*

$$f(xy) = f_1 \cdot \varphi_1(xy) + f_2 \cdot \varphi_2(xy) + f_3 \cdot \varphi_3(xy) + \ldots,$$

где

$$f_i = \int_{\Omega} w(\omega) f(xy) \varphi_i(xy) d\omega, \quad i = 1, 2, 3, \ldots,$$

причем ряд будет абсолютно и равномерно сходящимся.

ДВГНБ

ЭР01663

ДВГНБ

ЭР01663

ДВ ГОС. УНИВЕРСИТЕТ, УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ I, 1937
FAR EASTERN STATE UNIVERSITY, SCIENTIFIC STUDIES, VOL. I, 1937

Е. Н. Лыгин.

К ИНТЕГРАЛУ STIELTJES'A ПО RADON'У И ПО ГЮНТЕРУ.

SUR LES INTÉGRALES DE STIELTJES DONNÉS PAR RADON ET GÜNTHER.

Par E. N. Lyguin.

Здесь мы проведем сравнительное исследование двух обобщений интеграла Stieltjes'a, сделанных Radon'ом в 1913 г.[1] и Гюнтером в 1932 г.[2] и в 1935 г.[3] Причем из обобщений Radon'a будет взято его первое обобщение, относящееся, как и указано, к 1913 г.

Radon, исходя из построенной им теории абсолютно аддитивных функций, интеграл Stieltjes'a определяет следующим образом.

Пусть имеется аддитивная функция множества $f(E)$.

Точечные открытые множества образуют тело, если они удовлетворяют следующим условиям:

1. Тело A содержит интервалы $x_i' \leqslant x_i < x_i''$, $(i=1, 2, \ldots n)$, т. е. замкнутые на одном конце и открытые на другом.

2. Если множества E_1 и E_2 в отдельности содержатся в теле A, то в теле A содержатся E_1E_2, E_1-E_2 и E_1+E_2.

3. Если множества E_k $(k=1, 2, \ldots)$ содержатся в A и $E_i E_k=0$, $i \neq k$, то $\sum_1^\infty E_k$ содержится в A.

Из этих условий следует, что A включает все измеримые по Borel'ю множества.

4. Если E содержится в A, то имеется такое замкнутое множество E', что E содержится в E' и $|f(E)-f(E')|<\varepsilon$, где ε сколь угодно малое положительное число.

Пусть E_0 — открытое множество, принадлежащее телу A, и x_1, $x_2, \ldots, x_n$ n-мерные точки в E_0, которые также будем означать просто P.

[1] Radon. Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktion. Sitzungberichte der Akademie Wissenschaft in Wien. Naturwissenschaftl. Klasse. Abt. IIa. 1913.

[2] Günther. Sur les intégrales de Stieltjes et leurs applications aux problemes de la physigue mathématique. Travaux de l'institut physico-mathématique Stekloff. 1932.

[3] Günther. Sur quelques applications de la théorie des fonetions des domaines à la théorie équations intégrales. Математический сборник, т. 42, 1935.

ЭР01663

Пусть $F(P)$ функция точек x_1, x_2, ..., x_n, равномерно непрерывная в E_0. Равномерная непрерывность функции означает, что если имеем две некоторые точки P и P' в E_0 и обозначим

$$\overline{PP'} = (\Sigma(xi - x'_i)^2)^{1/2},$$

то для любого ε имеется $\delta(\varepsilon)$, что

$$|F(P) - F(P')| < \varepsilon \qquad \text{при } \overline{PP'} < \delta(\varepsilon).$$

$f(E)$ функция множества, абсолютно аддитивная, что означает, что для любой счетно-бесконечной системы не перекрывающих друг друга частичных открытых множеств E_1, E_2, ... множества E_0 имеет место

$$f(E_1) + f(E_2) + \ldots = f(E_1 + E_2 + \ldots).$$

Образуем подразделение Π множества E_0 на частичные множества $E_1, E_2, \ldots, E_n$, в каждом E_k возьмем точку P_k и образуем

$$S_\Pi = \sum_{k=1}^{n} F(P_k) f(E_k) = \sum_{E_0} \Pi F(P) \cdot \Delta f.$$

Обозначим максимальный диаметр частичного множества подразделения Π через $d(\Pi)$.

Тогда, при указанных предположениях, будет существовать предел

$$\lim_{\substack{E_0 \\ d(\Pi)=0}} \Sigma \Pi F(P) \cdot \Delta f = \int_{E_0} F(P) df(E),$$

который и является первым обобщением Radon'a интеграла Stieltjes'a.

Гюнтер при построении своего интеграла исходит из развитой им теории функции области, причем области точек всюду берутся замкнутыми, т. е. они включают в себя и предельные точки, причем мера границы всегда равна нулю. Отдельную такую область обозначим через (ω). По Гюнтеру области образуют тело, если они удовлетворяют следующим условиям:

1. Если для некоторой данной области (ω) в каждой совокупности областей (ω), вписанных в (ω) и, возрастая, стремящихся к (ω), а также в каждой совокупности областей $(\bar{\omega})$, описаных около (ω) и, убывая, стремящихся к (ω), существует несчетная бесконечность принадлежащих телу.

2. Если (ω_1) и (ω_2) составляют части тела и если все точки (ω_2) принадлежат области (ω_1), то точки области (ω_1), не принадлежащие (ω_2), образуют область (ω_3), принадлежащую телу.

3. Если множество точек, принадлежащих областям (ω_1) и (ω_2), составляющих части тела, образуют область, то эта область принадлежит телу.

Функция области $u(\omega)$ называется непрерывной в области (ω), если для каждой последовательности областей $(\underline{\omega})$, возрастая стремящихся к (ω), и для каждой последовательности областей $(\bar{\omega})$, убывая стремящихся к (ω), имеет место:

$$\lim U(\underline{\omega})\underline{\omega} = \lim U(\bar{\omega})\bar{\omega} = U(\omega)\omega,$$

где $U(\omega)$ означает полную вариацию функции $u(\omega)$ и ω — меру области (ω).

Легко доказать, что области (ω), для которых $u(\omega)$ непрерывна, образуют тело, т. е. удовлетворяют условиям 1, 2 и 3,

ЭР01663

Пусть средне-аддитивная с ограниченной вариацией функция $u(\omega)$ определена в области Ω. Кроме того, пусть $F(x)$ — непрерывная функция точек области Ω. Разобьем область Ω на частичные области (ω_1), (ω_2), ..., (ω_n) и в каждой частичной области (ω_i) возьмем точку x_i. Интеграл Stieltjes'a по Гюнтеру определяется как предел суммы:

$$\lim_{\substack{\omega_i=0,\ n=\infty}} \sum_{1}^{n} u(\omega_i)\omega_i F(x_i) = \int_{\Omega} u(\omega)F(x)d\omega,$$

который при указанных свойствах функций $u(\omega)$ и $F(x)$ существует. Области, в которых $u(\omega)$ непрерывна, образуют тело, обозначим его B. Образуем тело C так, что каждая область его, не имеющая общих точек с границей Ω, принадлежит телу B.

Наконец, введем функцию множества, которую определим следующим образом. Пусть E измеримое множество, точки которого находятся внутри Ω, и которое можно покрыть счетной системой открытых интервалов:

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_k,\ \ldots \qquad (1),$$

так, что каждая точка множества содержится или внутри одного из интервалов (1), или на их границах. Через $u(E)E$ обозначим нижнюю границу суммы

$$u(\alpha_1)\alpha_1 + u(\alpha_2)\alpha_2 + \ldots + u(\alpha_k)\alpha_k + \ldots$$

Для этой функции, очевидно, будут иметь место следующие соотношения:

$$u(E_1)E_1 \leqslant u(E_2)E_2, \text{ если } E_1 \text{ содержится в } E_2;$$

$$u(E_1)E_1 + u(E_2)E_2 \geqslant u(E_1 + E_2)(E_1 + E_2),$$

и если E_1 и E_2 открытые множества, то

$$u(E_1)E_1 + u(E_2)E_2 = u(E_1 + E_2)(E_1 + E_2) + u(E_1E_2)E_1E_2.$$

Очевидно, тело A будет таким, что для любого его открытого множества E_0 и множества E_1, такого, что E_1 содержится в E_0, будет иметь место соотношение

$$u(E_0)E_0 - u(E_0 - E_1)(E_0 - E_1) = u(E_1)E_1 \qquad (2).$$

Для двух множеств E_1 и E_2, принадлежащих телу A и не имеющих общих точек, будет иметь место, на основании (2), следующее:

$$u(E_1)E_1 + u(E_2)E_2 = u(E_1 + E_2)(E_1 + E_2) \qquad (3).$$

Так что можно говорить, что тело A определяется множествами, которые удовлетворяют соотношению (3) и условию 4.

Гюнтером показано, что если (ω) принадлежит телу C и если E есть множество точек, принадлежащих области (ω), то

$$u(E)E = u(\omega)\omega \qquad (4).$$

Теперь, на основании последнего и предыдущего, можно будет показать, что A содержит тело C. Именно, можно показать, что всякое множество E, образованное точками области (ω), за исключением точек ее границы, взятой из C, принадлежит телу A.

Действительно, если указанным образом возьмем два множества E_1 и E_2 из тела C и не имеющих общих точек, то покажем, что для них будет иметь место равенство (3), т. е. равенство, характеризующее тело A.

В самом деле, из самого определения функции $u(E)$ имеем

$$u(E_1 + E_2)(E_1 + E_2) \leqslant u(E_1)E_1 + u(E_2)E_2 \qquad (5).$$

ЭР01663

С другой стороны, если обозначить через $(\underline{\omega})$ область, образованную интервалами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, вписанную в (ω), то будем иметь:

$$u(\underline{\omega}_1)\underline{\omega}_1 + u(\underline{\omega}_2)\underline{\omega}_2 \leqslant \underline{u(\omega_2 + \omega_2)}\,\underline{(\omega_1 + \omega_1)} \leqslant u(E_1 + E_2)(E_1 + E_2).$$

В пределе

$$u(\omega_1)\omega_1 + u(\omega_2)\omega_2 \leqslant u(E_1 + E_2)(E_1 + E_2) \qquad (6).$$

Так как E_1 и E_2 взяты из C, для которых имеет место (4), то из неравенств (5) и (6) приходим к требуемому равенству

$$u(E_1)E_1 + u(E_2)E_2 = u(E_1 + E_2)(E_1 + E_2).$$

Что условие 4 имеет место для таких E_1 и E_2, так это очевидно. Таким образом, высказанное положение полностью доказано.

После этого нетрудно убедиться в том, что существование одного из интегралов Radon'a или Гюнтера будет влечь за собой существование другого, равного первому. Ибо, если существует один из них, то мы можем выделить тело множеств A, соответствующее телу областей C. На теле C интеграл Гюнтера будет совпадать с интегралом Radon'a на теле A, что теперь следует из только что доказанного положения и из четвертого свойства Radon'овского тела A.

Если же, например, интеграл Гюнтера существует в области Ω, которая шире тела C, то обозначим через β сумму мер всех областей из Ω, которые не принадлежат телу C. Довольно быстро можно показать, что эта мера равна нулю и, следовательно, равны нулям будут как интеграл Гюнтера, так и интеграл Radon'a, взятые по этим областям.

Действительно, пусть β не нуль. Тогда мы можем область (β) разбить на сколь угодно большое число областей $(\beta_1), (\beta_2), \ldots, (\beta_n)$ таких, что

$$\lim_{\beta_i \to 0} U(\beta_i)\beta_i \geqslant p, \quad p > 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где $U(\beta_i)$ означает, как и раньше, полную вариацию функции $u(\omega)$ на (β_i). Тогда сумма

$$U(\beta_1)\beta_1 + U(\beta_2)\beta_2 + \ldots + U(\beta_n)\beta_n \geqslant pn,$$

т. е. могла бы стать сколь угодно большой, но это противоречило бы тому положению, что функция $u(\omega)$ является функцией с ограниченной вариацией. Следовательно, β нуль, что и доказывает равнозначность интегралов Гюнтера и Radon'a, ибо, предполагая существование интеграла Radon'a, мы могли бы провести заключение, аналогичное последнему.

ЭР01663

ДВ ГОС. УНИВЕРСИТЕТ, УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ I, 1937
FAR EASTERN STATE UNIVERSITY, SCIENTIFIC STUDIES, VOL. I, 1937

А. П. Бекеев.

ПОСТРОЕНИЯ ШТЕЙНЕРА В ГЕОМЕТРИИ ТРЕУГОЛЬНИКА.

SUR LES CONSTRUCTIONS DE STEINER DANS LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE.

Par A. P. Bekeeff.

§ 1. Штейнер в известном сочинении "Geometrische Konstruktionen, ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises"[1] показал, что всякое геометрическое построение, выполняемое помощью циркуля и линейки, может быть выполнено путем проведения одних лишь прямых линий, если в плоскости чертежа дана одна и только одна постоянная окружность.

Основываясь на этой теореме, можно дать систематическое изложение совокупности тех предложений, которая известна под именем геометрии треугольника, и прежде всего в той ее части, которая относится к так называемым замечательным точкам и линиям треугольника.

Для достижения этой цели возьмем наиболее естественное и простое, а для нас наиболее удобное, построение геометрии треугольника, состоящее из описанной окружности E, центра ее O и вершин треугольника A, B, C.

Взяв за основу подобное построение, проведем через каждую пару точек из группы точек A, B, C и O прямые. Эти прямые в пересечении между собой, а также с постоянной окружностью, дадут ряд новых точек. Через эти точки и точки A, B, C и O снова проводим все возможные прямые, дающие в своем пересечении новый ряд точек, и т. д.

Покажем, что подобное осложнение основного чертежа дает нам все замечательные точки и прямые треугольника.

§ 2. Установим некоторые соглашения в обозначениях. Точки будем обозначать заглавными буквами, напр. P и Q; прямые малыми буквами p и q. С другой стороны, будем обозначать через PQ прямую, проходящую через точки P и Q, а через pq точку пересечения прямых p и q.[2]

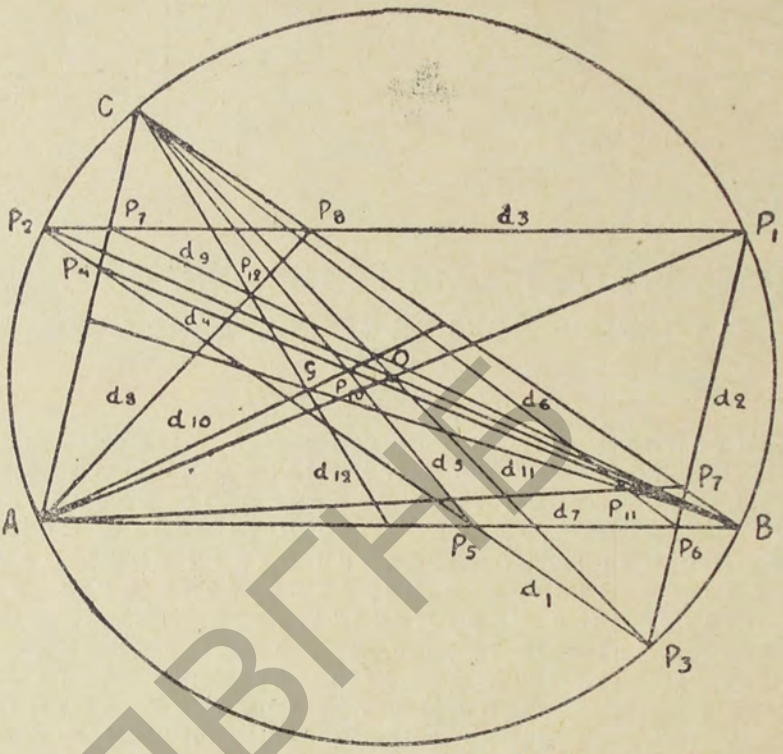
[1] Berlin, 1833, in Oswaldsklassiker der exakten Naturwissenschaften No. 60.

[2] Единственным исключением у нас остается обозначение постоянной окружности через E.

ЭР01663

Вводя подобные обозначения, поставим своей задачей настоящего очерка указать способы построения некоторых замечательных точек и прямых треугольника.

Теорема. *Центр тяжести G треугольника есть точка, определяемая следующей цепью построений* (черт. 1):



Черт. 1.

$$
\begin{array}{lll}
AO \cdot E = P_1; & BO \cdot E = P_2; & CO \cdot E = P_3 \\
P_2P_3 = d_1; & P_3P_1 = d_2; & P_1P_2 = d_3 \\
d_1 \cdot CA = P_4; & d_2 \cdot AB = P_6; & d_3 \cdot BC = P_8 \\
d_1 \cdot AB = P_5; & d_2 \cdot BC = P_7; & d_3 \cdot CA = P_9 \\
P_4B = d_4; & P_6C = d_6; & P_8A = d_8 \\
P_5C = d_5; & P_7A = d_7; & P_9B = d_9 \\
d_4d_5 = P_{10}; & d_6d_7 = P_{11}; & d_8d_9 = P_{12} \\
AP_{10} = d_{10}; & BP_{11} = d_{11}; & CP_{12} = d_{12}
\end{array}
$$

$$d_{11}d_{12} = d_{12}d_{10} = d_{10}d_{11} = G$$

Доказательство может быть проведено последовательным составлением выражений для барицентрических координат точек $P_1, P_2, P_3 \ldots$ и уравнений прямых d_1, d_2, d_3.

Действительно, барицентрические координаты точек P_1, P_2 и P_3 суть

$$-mn;\ 2b^2m;\ 2c^2n \text{ и т. д.}$$

Отсюда уравнения прямых d_1, d_2, d_3 будут:

$$-mnx + 2a^2ly + 2a^2lz = 0.$$

ЭР01663

Следовательно координаты точек P_4, P_5... P_9

$$2a^2l,\ 0,\ mn;\ a^2l,\ mn,\ 0;\ \text{и т. д.}$$

Тогда уравнения прямых d_4, d_5... d_9 выразятся:

$$mnx - 2a^2lz = 0$$
$$mnx - 2a^2ly = 0 \text{ и т. д.}$$

Дальнейший ход доказательства очевиден. Он требует отыскания выражений для координат точек P_{10}, P_{11}, P_{12} и составления уравнений прямых d_{10}, d_{11}, d_{12}. Точки пересечения каждой пары из прямых d_{10}, d_{11}, d_{12} дают одну и ту же точку, с координатами 1, 1, 1, т. е. центр тяжести G площади треугольника.

Из способа построения вытекает, что для нахождения точки G необходимо провести 11 прямых, не включая, конечно, сторон треугольника.

Необходимо отметить, что точка G получается после трехкратного осложнения чертежа.

§ 3. ***Теорема.*** *Центры J_a, J_b, J_c вневписанных окружностей и центр J вписанной окружности определяются следующими цепями построений:*

$$\begin{array}{lll} d_{10}\cdot BC = P_{13}; & d_{11}\cdot CA = P_{14}; & d_{12}\cdot AB = P_{15} \\ OP_{13} = d_{13}; & OP_{14} = d_{14}; & OP_{15} = d_{15} \\ d_{13}E = P_{16}; & d_{14}E = P_{17}; & d_{15}E = P_{18} \\ d_{13}E = P_{19}; & d_{14}E = P_{20}; & d_{15}E = P_{21} \\ AP_{16} = d_{16}; & BP_{17} = d_{17}; & CP_{18} = d_{18} \\ AP_{19} = d_{19}; & BP_{20} = d_{20}; & CP_{21} = d_{21} \end{array}$$

$$d_{17}d_{18} = d_{18}d_{16} = d_{16}d_{17} = J$$
$$d_{20}d_{21} = d_{21}d_{16} = d_{16}d_{20} = J_a$$
$$d_{21}d_{19} = d_{19}d_{17} = d_{17}d_{21} = J_b$$
$$d_{19}d_{20} = d_{20}d_{18} = d_{18}d_{19} = J_c$$

где прямые d_{10}, d_{11}, d_{12} определяются цепью построений, указанных в предыдущем параграфе, а точки P_{16}, P_{17}, P_{18} лежат внутри углов CAB, ABC, BCA.

Доказательство этой теоремы мы опускаем, т. к. оно хорошо известно.

Отметим лишь, что построение каждого центра требует проведения 15 прямых; кроме того центры получаются после 5-го осложнения основного чертежа.

§ 4. ***Теорема.*** *Ортоцентр H треугольника есть точка, определяемая следующей цепью построений:*

$$\begin{array}{lll} AO\cdot BC = P_{22}; & BO\cdot CA = P_{23}; & CO\cdot AB = P_{24} \\ P_3P_{23} = d_{22} & P_1P_{24} = d_{23}; & P_2P_{22} = d_{24} \\ P_2P_{24} = d_{25}; & P_3P_{22} = d_{26}; & P_1P_{23} = d_{27} \\ d_{22}d_{25} = P_{25}; & d_{23}d_{26} = P_{26}; & d_{24}d_{27} = P_{27} \\ AP_{25} = d_{28}; & BP_{26} = d_{29}; & CP_{27} = d_{30} \end{array}$$

$$d_{29}d_{30} = d_{30}d_{28} = d_{28}d_{29} = H.$$

Доказательство теоремы быстро получается из следующих уравнений прямых d_{22}, d_{25}, d_{23}... d_{27}

$$-2b^2c^2mnx + 16a^2s^2ly + 2a^2b^2lmz = 0$$
$$-2b^2c^2mnx + 2a^2c^2nly + 16a^2ls^2z = 0 \text{ и т. д.}$$

Из изложенного следует, что для построения ортоцентра необхо-

ЭР01663

дим 9 прямых, и ортоцентр появляется после двукратного осложнения чертежа (черт. 2).

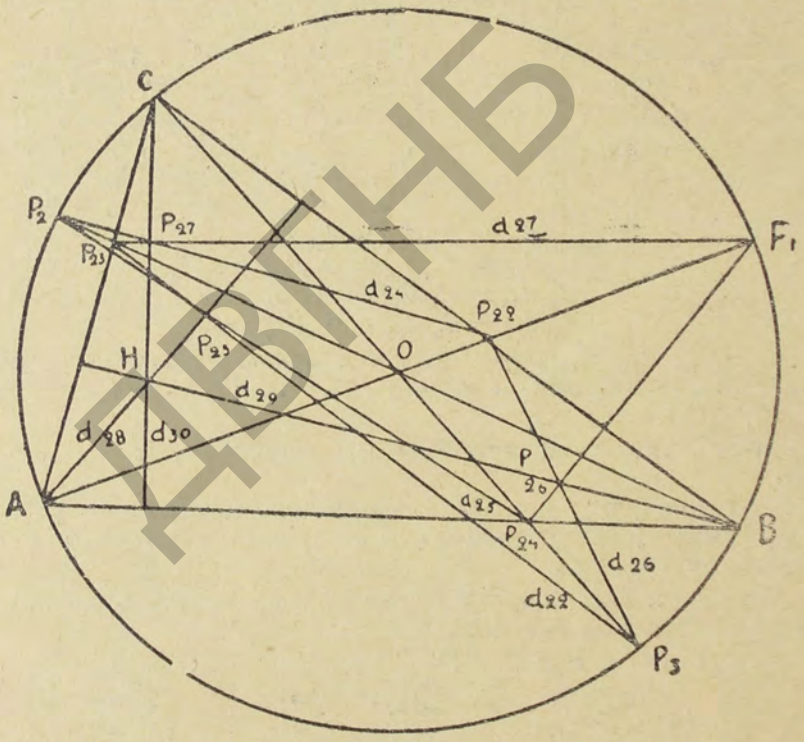
§ 5. ***Теорема.*** *Точка Лемуана K есть точка, определяемая следующей цепью построений.*

$$P_4P_{24}=d_{28};\quad P_6P_{22}=d_{30};\quad P_8P_{23}=d_{32}$$
$$P_5P_{23}=d_{29};\quad P_7P_{24}=d_{31};\quad P_9P_{22}=d_{33}$$
$$d_{28}d_{29}=P_{28};\quad d_{30}d_{31}=P_{29};\quad d_{32}d_{33}=P_{30}$$
$$AP_{28}=d_{34};\quad BP_{29}=d_{35};\quad CP_{30}=d_{36}$$
$$d_{35}d_{36}=d_{36}d_{34}=d_{34}d_{35}=K.$$

Доказательство исходит из уравнений прямых d_{28}, d_{29}... d_{33}. Эти уравнения следующие:

$$-b^2mnx+a^2lny+2a^2b^2lz=0$$
$$-c^2mnx+2a^2c^2ly+a^2lmz=0 \text{ и т. д.}$$

Дальнейший ход доказательства не представляет затруднений. Заметим, что построение точки K требует проведения 11 прямых.



Черт. 2.

§ 6. Предыдущие построения дают нам в то же самое время Штейнеровские построения следующих прямых, играющих большую роль в геометрии треугольника:

I	$OG \equiv ON \equiv HG$	Прямая Эйлера.
II	OJ	линия центров
III	KJ	
IV	KO	

ЭР01663

V KH
VI KG
VII JG.

Отметим, что прямая Эйлера требует для своего проведения 9 или 11 прямых; линия центров — 15 прямых; KO—11; KJ—21; KH—17; KG—17; JG—15; не включая указанных прямых и сторон треугольника.

§ 7. Пусть совокупность сторон треугольника рассматривается как кривая 3-го порядка. Тогда прямолинейная поляра любой точки M относительно этой кривой называется трилинейной полярой точки M, а полюс этой прямой относительно той же кривой называется трилинейным полюсом.

Цепи Штейнеровских построений, определяющих трилинейные поляру M и полюс прямой m, будут следующие:

1.

$$\begin{array}{ccc} AM\cdot BC=T_1; & BM\cdot CA=T_2; & CM\cdot AB=T_3 \\ T_2T_3=l_1; & T_3T_1=l_2; & T_1T_2=l_3 \\ l_1BC=T_4; & l_2CA=T_5; & l_3AB=T_6 \end{array}$$

$$T_5T_6=T_6T_4=T_4T_5=m$$ поляра точки M.

2.

$$\begin{array}{ccc} m\cdot BC=Q_1; & m\cdot CA=Q_2; & m\cdot AB=Q_3 \\ AQ_1=f_1; & BQ_2=f_2; & CQ_3=f_3 \\ f_2f_3=Q_4; & f_3f_1=Q_5; & f_1f_2=Q_6 \end{array}$$

$$AQ_4=BQ_5=CQ_6=M$$ полюс прямой m.

Таким образом видим, что для построения поляры данной точки необходимо провести пять прямых и для построения полюса данной прямой необходимо также пять прямых.

Основываясь на этих соображениях, отметим, что поляра точки O с уравнением

$$\frac{x}{a^2l}+\frac{y}{b^2m}+\frac{z}{c^2n}=0$$

нуждается в 5 прямых для своего построения.

Цепь этих построений следующая:

$$\begin{array}{ccc} AO\cdot BC=P_{22}, & BO\cdot CA=P_{23}, & CO\cdot AB=P_{24}; \\ P_{23}P_{24}=d_{37}, & P_{24}P_{22}=d_{38}, & P_{22}P_{23}=d_{39}; \\ d_{37}BC=P_{31}, & d_{38}CA=P_{32}, & d_{39}AB=P_{33}; \end{array}$$

$$AP_{31}=BP_{32}=CP_{33}$$ поляра точки O.

Далее отметим, что поляра точки J, имеющая уравнение

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0,$$

строится 20 прямыми.

Такое же количество прямых потребуется провести для построения каждой из поляр точек J_a, J_b, J_c, имеющих уравнения

$$-\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0$$

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=0$$

ЭР01663

Ортоцентрическая ось или поляра ортоцентра строится 14 прямыми.

Наконец, прямая Лемуана, уравнение которой

$$\frac{x}{a^2}+\frac{y}{b^2}+\frac{z}{c^2}=0$$

строится 17 прямыми.

§ 8. Обратимся к полюсам прямых. Уравнение прямой Эйлера имеет следующую форму:

$$xl(c^2-b^2)+ym(a^2-c^2)+zn(b^2-a^2)=0.$$

Полюс прямой Эйлера имеет координаты

$$\frac{1}{l(c^2-b^2)};\quad \frac{1}{m(a^2-c^2)};\quad \frac{1}{n(b^2-a^2)}.$$

Построение этой точки потребует проведения 15 прямых (или 17).

Уравнение линии центров имеет вид:

$$\Sigma\frac{x(b-c)(b+c-a)}{a}=0.$$

Следовательно, полюс линии центров будет иметь координаты

$$\frac{a}{(b-c)(b+c-a)};\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

и построение его потребует 21 прямой.

Уравнение прямой KO имеет вид

$$\frac{x(b^2-c^2)}{a^2}+\frac{y(c^2-a^2)}{b^2}+\frac{z(a^2-b^2)}{c^2}=0.$$

Полюс прямой KO будет точка с координатами

$$\frac{a^2}{b^2-c^2},\quad \frac{b^2}{c^2-a^2},\quad \frac{c^2}{a^2-b^2},$$

т. е. фокус параболы Кипера, играющей большую роль в геометрии треугольника.

Построение этой точки выполняется 17 прямыми. Полезно обратить внимание, что эта точка лежит на описанной окружности.

Прямая KG имеет уравнение:

$$x(b^2-c^2)+y(c^2-a^2)+z(a^2-b^2)=0.$$

Полюс прямой KG, следовательно, будет иметь координаты

$$\frac{1}{b^2-c^2},\quad \frac{1}{c^2-a^2},\quad \frac{1}{a^2-b^2},$$

т. е. это будет точка Штейнера.

Таким образом построение точки Штейнера, которая также находится на описанной окружности, выполняется 23 прямыми.

Прямая KH имеет уравнение

$$xl^2(c^2-b^2)+ym^2(a^2-c^2)+zn^2(b^2-a^2)=0.$$

Полюс прямой KH будет точка с координатами

$$\frac{1}{l^2(c^2-b^2)},\quad \frac{1}{m^2(a^2-c^2)},\quad \frac{1}{n^2(b^2-a^2)},$$

которая строится 23 прямыми.

ЭР01663

Наконец, прямая KJ имеет уравнение

$$\frac{x(b-c)}{a}+\frac{y(c-a)}{b}+\frac{z(a-b)}{c}=0.$$

Полюс прямой KJ имеет координаты

$$\frac{a}{b-c},\quad \frac{b}{c-a},\quad \frac{c}{a-b}$$

и строится с помощью 27 прямых.

Известно, что точка Тарри есть точка описанной окружности, диаметрально противоположная точке Штейнера. Следовательно, ее построение будет выполняться 24 прямыми.

Остается отметить, что полюс прямой GJ имеет координатами

$$\frac{1}{b-c},\quad \frac{1}{c-a},\quad \frac{1}{a-b}.$$

Для его построения требуется 21 прямая.

§ 9. Допустим, что дана точка M с координатами α, β, γ и образован треугольник оснований точки M. Обозначим стороны этого треугольника через m_a, m_b, m_c; уравнения их будут:

$$-\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=0$$

$$\frac{x}{\alpha}-\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=0$$

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}-\frac{z}{\gamma}=0$$

Эти прямые называют субполярами точки M.
Построим полюсы этих прямых. Их координаты будут

$$-\alpha,\ \beta,\ \gamma;$$
$$\alpha,\ -\beta,\ \gamma;$$
$$\alpha,\ \beta,\ -\gamma;$$

Точки с указанными координатами называются точками алгебраически добавочными точке α, β, γ.

Очевидно, алгебраически добавочными точками по отношению к центру вписанного круга будут центры вневписанных кругов.

Штейнеровские построения алгебраически добавочных точек представляются в следующем виде:

$$AM\cdot BC=T_1;\quad BM\cdot CA=T_2;\quad CM\cdot AB=T_3$$
$$T_2T_3=l_1;\quad T_3T_1=l_2;\quad T_1T_2=l_3$$
$$l_1\cdot BC=T_4$$
$$AT_4=l_4$$
$$CM\cdot l_4=T_7;\quad BM\cdot l_4=T_8$$
$$AM\cdot BT_7=BT_7\cdot CT_8=CT_8\cdot AM=\text{точка}\,(-\alpha,\beta,\gamma).$$

Построение двух других точек совершается по следующим схемам:

$$l_2\cdot CA_5=T_5$$
$$BT_5=l_5$$
$$AM\cdot l_5=T_9,\quad CM\cdot l_5=T_{10}$$
$$BM\cdot CT_9=CT_9\cdot AT_{10}=AT_{10}\cdot BM=\text{точка}\,(\alpha,-\beta,\gamma).$$

ЭР01663

$$l_3 \cdot AB = T_6$$
$$CT_6 = l_6$$
$$BM \cdot l_6 = T_{11}, \quad AM \cdot l_6 = T_{12}$$
$$CM \cdot AT_{11} = AT_{11} \cdot BT_{12} = BT_{12} \cdot CM = \text{точка } (\alpha, \beta, -\gamma).$$

Легко заметить, что построение алгебраически добавочной точки требует 6 прямых, а построение всей системы 9 прямых.

Прямые, проведенные через вершины данного треугольника параллельно сторонам, образуют так называемый антидополнительный треугольник. Координаты его вершин суть:

$$-1, \quad 1, \quad 1$$
$$1, \quad -1, \quad 1$$
$$1, \quad 1, \quad -1$$

Отсюда видим, что вершины антидополнительного треугольника суть алгебраически добавочные точки центра тяжести. Построение каждой вершины потребует 15 прямых. Все вершины будут построены помощью 24 прямых.

Для центра описанной окружности алгебраически добавочными точками будут центры окружностей Карно, т. е. окружностей, имеющих центры, симметричные центру описанной окружности, радиусы, равные радиусу описанной окружности и проходящие соответственно через вершины B и C, C и A, A и B. Построение центров окружностей Карно, очевидно, выполняется 6 прямыми.

Точки, алгебраически добавочные с точкой Лемуана, а именно

$$-a^2, \quad b^2, \quad c^2$$
$$a^2, \quad -b^2, \quad c^2$$
$$a^2, \quad b^2, \quad -c^2$$

образуют так называемый тангенциальный треугольник, для которого описанная окружность является вписанной. Построение каждой вершины требует 15 прямых, а построение всех вершин — 24 прямых.[1]

Центры вневписанных окружностей, как алгебраически добавочные точки по отношению к центру вписанной окружности, требуют для построения каждого из них 19 прямых.

Сопоставляя полученные данные с построением, указанным в § 3, замечаем, что построение по способу § 3 является геометрографичнее.

§ 10. Построение тангенциального треугольника может быть осуществлено и при помощи теоремы Паскаля. В этом случае построение касательных обусловливается следующими цепями построений:

$$AO \cdot E = P_1; \quad BO \cdot E = P_2; \quad CO \cdot E = P_3$$
$$AP_2 = d_{40}; \quad BP_3 = d_{42}; \quad CP_1 = d_{44}$$
$$AP_3 = d_{41}; \quad BP_1 = d_{43}; \quad CP_2 = d_{45}$$
$$d_{41}d_{45} = P_{34}; \quad d_{43}d_{41} = P_{36}; \quad d_{45}d_{43} = P_{38}$$
$$d_{40}d_{42} = P_{35}; \quad d_{42}d_{44} = P_{37}; \quad d_{44}d_{40} = P_{39}$$
$$P_{34}P_{35} = d_{46}; \quad P_{36}P_{37} = d_{47}; \quad P_{38}P_{39} = d_{48}$$
$$d_{46}BC = P_{40}; \quad d_{47}CA = P_{41}; \quad d_{48}AB = P_{42}$$
$$AP_{40} = \text{касат. } A; \quad BP_{41} = \text{касат. } B; \quad CP_{42} = \text{касат. } C$$

[1] Построение касательной в A к E требует 23 прямых.

ЭР01663

Таким образом для проведения касательной необходимо 7 прямых, т. е. полученный прием обладает геометрографическим преимуществом по сравнению со способом § 9.

Построение же точки Лемуана, как центра гомологии данного треугольника и его тангенциального, потребует 15 прямых, т. е. способ § 5 является геометрографичнее.

§ 11. Допустим, что дана прямая с уравнением

$$px + ty + qz = 0.$$

Тогда три прямые, уравнения которых

$$\begin{aligned} -px + ty + qz &= 0 \\ px - ty + qz &= 0 \\ px + ty - qz &= 0 \end{aligned}$$

называются алгебраически добавочными прямыми по отношению к данной прямой.

Построение алгебраически добавочных прямых осуществляется по принципу двойственности, исходя из построения алгебраически добавочных точек.

Не приводя подробностей, выпишем цепь необходимых Штейнеровских построений.

Допустим, что m — данная прямая.

Тогда

$$\begin{array}{lll}
BC \cdot m = R_1 & CA \cdot m = R_2 & AB \cdot m = R_3 \\
AR_1 = g_1 & BR_2 = g_2 & CR_3 = g_3 \\
g_2 g_3 = R_4 & g_3 g_1 = R_5 & g_1 g_2 = R_6 \\
AR_4 = g_4 & BR_5 = g_5 & CR_6 = g_6 \\
BC \cdot g_4 = R_7 & CA \cdot g_5 = R_8 & AB \cdot g_6 = R_9 \\
R_2 R_7 = g_7 & R_3 R_8 = g_9 & R_1 R_9 = g_{11} \\
R_3 R_7 = g_8 & R_1 R_8 = g_{10} & R_2 R_9 = g_{12} \\
g_7 AB = R_{10} & g_8 BC = R_{12} & g_{11} CA = R_{14} \\
g_8 AC = R_{11} & g_{10} BA = R_{13} & g_{12} AB = R_{15}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
R_{10}R_1 = R_{11}R_1 = R_{10}R_{11} & \text{алгебраически добавочные прямые по отношению к прямой } m. \\
R_{12}R_2 = R_{13}R_2 = R_{12}R_{13} & \\
R_{14}R_3 = R_{15}R_3 = R_{14}R_{15} &
\end{array}$$

Из изложенного видно, что построение системы алгебраически добавочных прямых требует проведения 12 прямых, а построение отдельной прямой — 5 прямых.

Разобранные случаи построения замечательных точек и прямых треугольника с несомненностью убеждают в возможности проведения Штейнеровских построений и для получения других точек и прямых в треугольнике.

Кроме выявления самих способов построения, мы здесь имеем возможность оценивать каждое построение с геометрографической точки зрения, т. к. вопрос критики допущений Лемуана о равнозначности операций построения отпадает, поскольку мы пользуемся проведением лишь прямых линий.

Владивосток.
Ноябрь 1934 г.

ЭР01663

ДВГНБ

ЭР01663

ДВ ГОС. УНИВЕРСИТЕТ, УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ I, 1937
FAR EASTERN STATE UNIVERSITY, SCIENTIFIC STUDIES, VOL. I, 1937

А. П. Бекеев.

О НЕКОТОРЫХ СЛУЧАЯХ ГОМОЛОГИЧЕСКОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ.

SUR CERTAINS CAS DES TRIANGLES HOMOLOGIQUES.

Par A. P. Bekeeff.

§ 1. Известно, что если прямые AA_1, BB_1, CC_1, соединяющие вершины двух треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, пересекаются в одной точке, то точки пересечения пар сторон треугольников BC и B_1C_1; CA и C_1A_1; AB и A_1B_1 находятся в трех точках, лежащих на одной прямой.

Два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, обладающие указанным в теореме свойством, называются гомологическими; точка пересечения прямых AA_1, BB_1, CC_1 называется центром гомологии, а прямая, на которой расположены точки пересечения пар сторон BC и B_1C_1; CA и C_1A_1; AB и A_1B_1 — осью гомологии.

Будем обозначать гомологичность треугольников следующим образом

$$ABC \times A_1B_1C_1;$$

центр гомологии через H и ось гомологии через h.

§ 2. Допустим, что треугольник ABC взят за координатный, а барицентрические координаты треугольника $A_1B_1C_1$ даны таблицей:

$$\left.\begin{matrix}\alpha_1\beta_1\gamma_1\\ \alpha_2\beta_2\gamma_2\\ \alpha_3\beta_3\gamma_3\end{matrix}\right\} \qquad (1).$$

Очевидно, условие гомологии ABC и $A_1B_1C_1$ должно состоять в том, чтобы прямые AA_1, BB_1, CC_1, имеющие уравнениями

$$\left.\begin{aligned} AA_1 \ldots\ldots\ldots\ldots & \quad \frac{y}{\beta_1} = \frac{z}{\gamma_1}\\ BB_1 \ldots\ldots\ldots\ldots & \quad \frac{z}{\gamma_2} = \frac{x}{\alpha_2}\\ CC_1 \ldots\ldots\ldots\ldots & \quad \frac{x}{\alpha_3} = \frac{y}{\beta_3}\end{aligned}\right\} \qquad (2),$$

пересекались в одной точке, т. е. чтобы

$$\alpha_2\beta_3\gamma_1 = \alpha_3\beta_1\gamma_2 \qquad (3).$$

ЭР01663

При введенных обозначениях за координаты центра гомологии можно принять следующие выражения

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha_3\alpha_2 = \alpha_3\beta_1 = \alpha_2\gamma_1 \\ y &= \beta_3\alpha_2 = \beta_1\beta_3 = \beta_1\gamma_2 \\ z &= \gamma_2\alpha_3 = \gamma_1\beta_3 = \gamma_2\gamma_1 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

и за уравнение оси гомологии

$$x(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)(\beta_1\gamma_3 - \beta_3\gamma_1) + y(\beta_1\gamma_3 - \beta_3\gamma_1)(\gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1) + \\ + z(\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1) = 0 \tag{5}$$

и два аналогичных, полученных круговой подстановкой.

Вследствие равенств (3) таблицам координат (1) можно придать вид

$$\left.\begin{matrix} \alpha & t & q \\ p & \beta & q \\ p & t & \gamma \end{matrix}\right\} \tag{6},$$

где α, β, γ, p, t, q — некоторые зависящие от взаимного расположения ABC и $A_1B_1C_1$ величины.

При подобном представлении координат вершин координаты центра гомологии H будут

$$p,\ t,\ q \tag{7},$$

а уравнение оси гомологии h будет

$$\frac{x}{p-\alpha} + \frac{y}{p-\beta} + \frac{z}{q-\gamma} = 0 \tag{8}.$$

§ 3. Два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ могут быть между собой гомологичны шестью различными способами. Все эти способы указаны ниже, а именно:

I	$ABC \times A_1B_1C_1$
II	$ABC \times B_1C_1A_1$
III	$ABC \times C_1A_1B_1$
IV	$ABC \times A_1C_1B_1$
V	$ABC \times C_1B_1A_1$
VI	$ABC \times B_1A_1C_1$

В каждом из этих случаев мы имеем следующие соотношения между координатами таблицы (1):

I	$\alpha_2\beta_3\gamma_1 = \alpha_3\beta_1\gamma_2$
II	$\alpha_1\beta_2\gamma_3 = \alpha_2\beta_3\gamma_1$
III	$\alpha_3\beta_1\gamma_2 = \alpha_1\beta_2\gamma_3$
IV	$\alpha_2\beta_1\gamma_3 = \alpha_3\beta_2\gamma_1$
V	$\alpha_1\beta_3\gamma_2 = \alpha_2\beta_1\gamma_3$
VI	$\alpha_3\beta_2\gamma_1 = \alpha_1\beta_3\gamma_2$

§ 4. Поставим вопрос, не может ли треугольник ABC быть гомологичен треугольнику $A_1B_1C_1$ в двух, трех, четырех и т. д. расположениях последнего. Начнем с первого случая.

Будем искать двойную гомологию между следующими комбинациями

$$|\,\mathrm{I\ II}\,|,\ |\,\mathrm{I\ III}\,|,\ |\,\mathrm{I\ IV}\,|,\ |\,\mathrm{I\ V}\,|,\ |\,\mathrm{I\ VI}\,|$$

и аналогичными.

ЭР01663

В первом случае мы имеем

$$\alpha_2\beta_3\gamma_1 = \alpha_3\beta_1\gamma_2 = \alpha_1\beta_2\gamma_3$$

а отсюда

$$\alpha_3\beta_1\gamma_2 = \alpha_1\beta_2\gamma_3.$$

Таким образом имеем: если два треугольника одновременно гомологичны и по типу I и по типу II, то они будут гомологичны и по типу III, т. е. треугольники будут гомологичны между собой тремя, а не двумя способами.

Тот же результат дает нам и вторая комбинация.

Обращаемся теперь к третьей комбинации. Здесь мы имеем:

$$\alpha_2\beta_3\gamma_1 = \alpha_3\beta_1\gamma_2$$
$$\alpha_2\beta_1\gamma_3 = \alpha_3\beta_2\gamma_1$$

откуда

$$\frac{\beta_3\gamma_1}{\beta_1\gamma_3} = \frac{\beta_1\gamma_2}{\beta_2\gamma_1}$$

или

$$\frac{\gamma_1^2}{\gamma_2\gamma_3} = \frac{\beta_1^2}{\beta_2\beta_3}$$

Следовательно, возможно существование двойной гомологичности типа

$$ABC \asymp A_1B_1C_1 \asymp A_1C_1B_1.$$

Рассмотрим теперь случай | I V |. Здесь мы имеем

$$\alpha_2\beta_3\gamma_1 = \alpha_3\beta_1\gamma_2$$
$$\alpha_1\beta_3\gamma_2 = \alpha_2\beta_1\gamma_3$$

или

$$\frac{\beta_3^2}{\alpha_3\gamma_3} = \frac{\beta_1^2}{\alpha_1\gamma_1}$$

Таким образом возможна двойная гомологичность типа

$$ABC \asymp A_1B_1C_1 \asymp C_1B_1A_1.$$

Наконец, нетрудно показать, что существует двойная гомологичность типа

$$ABC \asymp A_1B_1C_1 \asymp B_1A_1C_1.$$

Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, гомологичные между собой двумя способами, будем называть бигомологическими.

Кроме указанного способа два треугольника, как было отмечено выше, могут быть гомологичными между собой тремя способами, а именно:

$$ABC \asymp A_1B_1C_1 \asymp B_1C_1A_1 \asymp C_1A_1B_1.$$

Точно так же можно показать, что случай тройной гомологичности имеет место и в такой комбинации:

$$ABC \asymp A_1C_1B_1 \asymp C_1B_1A_1 \asymp B_1A_1C_1.$$

Треугольники, между собой гомологичные тремя различными способами, будем называть тригомологическими.[1]

Наконец, можно показать, что существуют случаи, когда треугольники, между собой гомологичны четырьмя способами, а именно:

$$ABC \asymp A_1B_1C_1 \asymp B_1C_1A_1 \asymp C_1A_1B_1 \asymp A_1C_1B_1.$$

[1] Термин „тригомологический" дан проф. Агрономовым, „Sur les triangles tetrahomologiques". Труды Дальневосточного Университета, Сборник памяти проф. Агрономова, Владивосток, 1930 г., стр. 51.

ЭР01663

Это случай четырехкратной гомологичности в B; существуют и два других аналогичных случая гомологичности указанных двух треугольников в A и в C.

Треугольники подобного рода называются тетрагомологическими.[1]

Очевидно, что случаев пяти- и шестикратной гомологичности не существует.

§ 5. В связи с положением гомологических треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ введем некоторые точки и линии.

Пусть A_{11}, B_{11}, C_{11} — точки пересечения прямых.

$$BC_1 \text{ и } B_1C$$
$$CA_1 \text{ и } C_1A$$
$$AC_1 \text{ и } A_1B.$$

Нетрудно показать, что координаты этих точек будут

$$\left.\begin{matrix} p & \beta & \gamma \\ \alpha & t & \gamma \\ \alpha & \beta & q \end{matrix}\right\} \tag{9},$$

т. е. треугольник ABC и треугольник $A_{11}B_{11}C_{11}$ имеют координатами вершин выражения, где α, β, γ и p, t, q взаимно меняются ролями. Очевидно, что центр гомологии треугольников ABC и $A_{11}B_{11}C_{11}$ имеет координаты

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma \tag{10},$$

а ось гомологии совпадает с осью гомологии треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

Далее нетрудно показать, что треугольники ABC и $A_{11}B_{11}C_{11}$ также гомологичны с центром гомологии

$$\alpha+p,\ \beta+t,\ \gamma+q \tag{11}.$$

Точки

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma$$
$$\alpha+p,\ \beta+t,\ \gamma+q$$

будем называть дополнительными центрами гомологии, а так как дополнительные центры и центр гомологии лежат на одной прямой, то этой прямой присвоим наименование директриссы гомологии.

Уравнение директриссы имеет следующий вид

$$x(t\gamma - q\beta)+y(q\alpha - p\gamma)+z(p\beta - t\alpha)=0 \tag{12}.$$

Обозначим через a_{11}, b_{11}, c_{11} прямые, соединяющие точки

$$bc_1 \text{ и } b_1c$$
$$ca_1 \text{ и } c_1a$$
$$ab_1 \text{ и } a_1b$$

Образованный этими тремя прямыми треугольник гомологичен с треугольниками ABC и $A_1B_1C_1$. Оси гомологии этих пар треугольников мы будем называть дополнительными осями гомологии, а так как дополнительные оси и ось гомологии пересекаются в одной точке, то этой точке присвоим наименование фокуса гомологии.

[1] Термин „тетрагомологический" дан проф. Агрономовым, „Sur les triangles tetrahomologiques". Труды Дальневосточного Университета, Сборник памяти проф. Агрономова, Владивосток, 1930 г. стр. 51.

ЭР01663

ЛВГНБ

Фокус гомологии имеет координаты

$$p(p-\alpha)(t\gamma-q\beta), \tag{13}$$

§ 6. Переходя к обследованию отдельных случаев гомологического расположения треугольников, наметим общий план этого обследования. В каждом отдельном случае мы будем интересоваться:

1) взаимным расположением центров и осей,

2) конечным или бесконечно удаленным положением осей и центров.

Разбирая по этому плану случай простой гомологии, мы должны выделить в нем то частное расположение, когда центр гомологии находится на оси.

Аналитически это выражается следующим образом

$$\alpha_3\alpha_2(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1)(\beta_1\gamma_3-\beta_3\gamma_1)+\beta_3\alpha_2(\beta_1\gamma_3-\beta_3\gamma_1)(\gamma_1\alpha_2-\gamma_2\alpha_1)+$$
$$+\gamma_2\alpha_3(\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1)(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1)=0$$

или упрощенно в одной из форм

$$\left.\begin{aligned}2\left(\frac{\beta_2\gamma_1}{\beta_1\gamma_2}+\frac{\gamma_3\alpha_2}{\gamma_2\alpha_3}+\frac{\alpha_1\beta_3}{\alpha_3\beta_1}\right)&=3+\frac{\beta_2\gamma_3}{\beta_3\gamma_2}+\frac{\gamma_3\alpha_1}{\gamma_1\alpha_3}+\frac{\alpha_1\beta_2}{\alpha_2\beta_1}\\ 2\left(\frac{\beta_1\gamma_3}{\beta_3\gamma_1}+\frac{\gamma_2\alpha_1}{\gamma_1\alpha_2}+\frac{\alpha_3\beta_2}{\alpha_2\beta_3}\right)&=3+\frac{\beta_2\gamma_3}{\beta_3\gamma_2}+\frac{\gamma_3\alpha_1}{\gamma_1\alpha_3}+\frac{\alpha_1\beta_2}{\alpha_2\beta_1}\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

принимая во внимание при упрощении (3).

В координатах (6) полученный критерий (14) можно представить в следующей форме

$$pp\gamma+t\gamma\alpha+q\alpha\beta+3ptq-2(tq\alpha+qp\beta+pt\gamma)=0 \tag{15}$$

или

$$\frac{p}{p-\alpha}+\frac{t}{t-\beta}+\frac{q}{q-\gamma}=0 \tag{16}$$

Если взять произвольные числа K, L, M, N, то можно удовлетворить соотношению (16), положив

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=p+\frac{Kp}{M-N}\\ \beta&=t+\frac{Kt}{N-L}\\ \gamma&=q+\frac{Kq}{L-M}\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

Отсюда имеем

$$p=\frac{(M-N)\alpha}{K+M-N};\quad t=\frac{(N-L)\beta}{K+N-L};\quad q=\frac{(L-M)\gamma}{K+L-M} \tag{18}$$

Таким образом координатный треугольник и треугольник, имеющий координатами вершин

$$\left.\begin{aligned}&\alpha,\quad \frac{(N-L)\beta}{K+N-L},\quad \frac{(L-M)\gamma}{K+L-M}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\}\tag{19}$$

обладают тем свойством, что центр гомологии лежит на оси гомологии.

ЭР01663

ЛВГНБ

Полученным координатам (19) можно придать несколько иное выражение. Для этого в уравнении (15) положим

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= 1+m\alpha_1\\ \beta &= 1+m\beta_1\\ \gamma &= 1+m\gamma_1\end{aligned}\right\} \qquad (20) \qquad \left.\begin{aligned}p &= 1+mp_1\\ t &= 1+mt_1\\ q &= 1+mq_1\end{aligned}\right\} \qquad (21),$$

где m, α_1, β_1, γ_1, p_1, t_1, q_1 пока произвольны.

В соответствии с (20) и (21) уравнение (15) последовательно принимает следующие формы

$$\Sigma(1+mp_1)(1+m\beta_1)(1+m\gamma_1)+$$
$$+3(1+mp_1)(1+mt_1)(1+mq_1)-2\Sigma(1+mt_1)(1+mq_1)(1+m\alpha_1)=0$$

и

$$m[\Sigma p_1\beta_1\gamma_1+3p_1t_1q_1-2\Sigma\alpha_1t_1q_1]=\Sigma p_1(\beta_1+\gamma_1)-\Sigma\beta_1\gamma_1-\Sigma t_1q_1.$$

Отсюда одно из произвольных m определяется так

$$m=\frac{\Sigma p_1(\beta_1+\gamma_1)-\Sigma\beta_1\gamma_1-\Sigma t_1q_1}{\Sigma p_1\beta_1\gamma_1+3p_1t_1q_1-2\Sigma\alpha_1t_1q_1} \qquad (22).$$

Таким образом выражения (20) и (21) в соединении с (22) дают значения координат вершин треугольника, находящегося с данным треугольником в рассматриваемом специальном гомологическом соотношении.

В отношении конечных и бесконечных положений центра и осей мы различаем три случая:

I. Центр гомологии находится в бесконечности.

Аналитический признак в этом случае будет

$$\alpha_3\alpha_2+\beta_3\alpha_2+\gamma_2\alpha_3=0 \qquad (23)$$

или

$$\alpha_3\beta_1+\beta_1\beta_3+\gamma_1\beta_3=0 \qquad (24)$$

или

$$\alpha_2\gamma_1+\beta_1\gamma_2+\gamma_2\gamma_1=0 \qquad (25).$$

Выражениям (23), (24), (25) можно придать более мнемоническую форму, а именно

$$\left.\begin{aligned}\frac{\beta_3}{\alpha_3}+\frac{\gamma_2}{\alpha_2}&=-1\\ \frac{\gamma_3}{\beta_3}+\frac{\alpha_2}{\beta_2}&=-1\\ \frac{\alpha_3}{\gamma_3}+\frac{\beta_2}{\gamma_2}&=-1\end{aligned}\right\} \qquad (26).$$

В координатах (6) вышеуказанный критерий принимает следующий вид

$$p+t+q=0 \qquad (27).$$

II. Ось гомологии находится в бесконечности.

Аналитическим признаком для этого случая будет

$$\left.\begin{aligned}\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2=\gamma_2\alpha_3-\gamma_3\alpha_2=\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2\\ \beta_3\gamma_1-\beta_1\gamma_3=\gamma_3\alpha_1-\gamma_1\alpha_3=\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3\\ \beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1=\gamma_1\alpha_2-\gamma_2\alpha_1=\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

или в координатах (6)

$$p-\alpha=t-\beta=q-\gamma \qquad (29).$$

ЭР01663

III. Центр и ось гомологии находятся в бесконечности.

В этом случае критерий слагается из (26) и (28), или из (27) и (29) и имеет вид:

$$\left.\begin{array}{c} p+t+q=0 \\ p-\alpha=t-\beta=q-\gamma \end{array}\right\} \qquad (30).$$

Для каждого из разобранных случаев координаты вершин треугольника $A_1B_1C_1$ имеют следующий вид:

для I случая

$$\left.\begin{array}{c} \alpha,\ N-L,\ L-M, \\ M-N,\ \beta,\ L-M, \\ M-N,\ N-L,\ \gamma \end{array}\right\} \qquad (31),$$

для II случая

$$\left.\begin{array}{c} \alpha,\ \beta+K,\ \gamma+K \\ \alpha+K,\ \beta,\ \gamma+K \\ \alpha+K,\ \beta+K,\ \gamma \end{array}\right\} \qquad (32)$$

и для III случая

$$\left.\begin{array}{c} 3\alpha,\ 2\beta-\gamma-\alpha,\ 2\gamma-\alpha-\beta \\ 2\alpha-\beta-\gamma,\ 3\beta,\ 2\gamma-\alpha-\beta \\ 2\alpha-\beta-\gamma,\ 2\beta-\gamma-\alpha,\ 3\gamma \end{array}\right\} \qquad (33).$$

§ 7. Случай двойной гомологичности треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ имеет место в следующих комбинациях:

1. $ABC \times A_1B_1C_1 \times A_1C_1B_1$
2. $ABC \times A_1B_1C_1 \times C_1B_1A_1$
3. $ABC \times A_1B_1C_1 \times B_1A_1C_1$
4. $ABC \times B_1C_1A_1 \times A_1C_1B_1$
5. $ABC \times B_1C_1A_1 \times C_1B_1A_1$
6. $ABC \times B_1C_1A_1 \times B_1A_1C_1$
7. $ABC \times C_1A_1B_1 \times A_1C_1B_1$
8. $ABC \times C_1A_1B_1 \times C_1B_1A_1$
9. $ABC \times C_1A_1B_1 \times B_1A_1C_1$

Рассмотрим все эти комбинации. Для случаев 1, 2, 3 координаты вершин треугольника, как мы раньше видели, заключены в таблице

$$\begin{array}{c} \alpha,\ t,\ q \\ p,\ \beta,\ q \\ p,\ t,\ \gamma \end{array}$$

Если имеет место первый случай, то появляется условие

$$\alpha_2\beta_1\gamma_3 = \alpha_3\beta_2\gamma_1$$

или

$$pt\gamma = p\beta q$$

или

$$\frac{t}{\beta} = \frac{q}{\gamma}$$

Если имеет место второй случай, то

$$\frac{q}{\gamma} = \frac{p}{\alpha}$$

ЭР01663

и, наконец, если имеет место третий случай, то

$$\frac{p}{\alpha} = \frac{t}{\beta}.$$

Для случаев 4, 5, 6 таблицу координат вершин треугольника необходимо принять в следующем виде

$$\begin{matrix} p, & t, & \gamma \\ \alpha, & t, & q \\ p, & \beta, & \gamma \end{matrix}$$

с дополнительными условиями

$$\frac{p}{\alpha} = \frac{q}{\gamma}$$
$$\frac{t}{\beta} = \frac{p}{\alpha}$$
$$\frac{q}{\gamma} = \frac{t}{\beta}$$

Наконец, в случаях 7, 8, 9 имеем таблицу координат в виде

$$\begin{matrix} p, & \beta, & q \\ p, & t, & \gamma \\ \alpha, & t, & q \end{matrix}$$

при дополнительных условиях

$$\frac{t}{\beta} = \frac{p}{\alpha}$$
$$\frac{q}{\gamma} = \frac{t}{\beta}$$
$$\frac{p}{\alpha} = \frac{q}{\gamma}$$

Очевидно, что геометрическое значение всех девяти случаев одно и то же. В силу этого мы ограничимся рассмотрением только первого случая.

§ 8. Итак, мы имеем для координат вершин треугольника значения

$$\begin{matrix} \alpha, & t, & q \\ p, & \beta, & q \\ p, & t, & \gamma \end{matrix}$$

при дополнительном условии

$$\frac{t}{\beta} = \frac{q}{\gamma}$$

Полагая эти отношения равными $\frac{1}{T}$, тогда имеем

$$\beta = Tt$$
$$\gamma = Tq$$

ЭР01663

ДВГНБ

и таблица координат получает вид

$$\begin{matrix} \alpha,\ t,\ q \\ p,\ Tt,\ q \\ p,\ t,\ Tq \end{matrix}.$$

Очевидно, что центры гомологии H_1 и H_2 суть точки с координатами

$$p,\ t,\ q$$

и

$$p,\ Tt,\ Tq,$$

а оси гомологии h_1 и h_2 имеют уравнениями

$$\frac{x}{p-\alpha}+\frac{y}{t(T-1)}+\frac{z}{q(T-1)}=0,$$

$$\frac{x}{p-\alpha T}+\frac{y}{Tt-t}+\frac{z}{Tq-q}=0.$$

Как и следует из определения, вершины A и A_1 и центры гомологии лежат на одной прямой, а стороны BC и B_1C_1 и две оси гомологии пересекаются в одной точке.

§ 9. Рассмотрим теперь возможные взаимные положения осей и центров. Здесь, очевидно, необходимо выделить следующие случаи:

1. H_1 лежит на h_1
2. H_1 „ на h_2
3. H_2 „ на h_1
4. H_2 „ на h_2
5. H_1 „ на h_1 }
   H_2 „ на h_2 }
6. H_1 „ на h_2 }
   H_2 „ на h_1 }
7. H_1 и H_2 лежат на h_1
8. H_1 и H_2 лежат на h_2.

В первом случае имеем

$$\frac{p}{p-\alpha}+\frac{2}{T-1}=0.$$

Отсюда

$$\alpha=\frac{1}{2}(T+1)p.$$

Следовательно, в этом случае таблица координат вершин будет

$$\begin{matrix} (T+1)p,\ 2t,\ 2q \\ p,\ Tt,\ q \\ p,\ t,\ Tq \end{matrix}$$

Во втором случае таблица координат имеет вид

$$\begin{matrix} (T+1)p,\ 2Tt,\ 2Tq \\ p,\ Tt,\ q \\ p,\ t,\ Tq \end{matrix}$$

В третьем случае эта же таблица будет

$$\begin{matrix} (3T-1)p,\ 2Tt,\ 2Tq \\ p,\ Tt,\ q \\ p,\ t,\ Tq \end{matrix}$$

ЭР01663

ЛВГБ

и в четвертом случае

$$\begin{matrix}(3T-1)p, & 2T^2t, & 2T^2q\\ p, & Tt, & q\\ p, & t, & Tq\end{matrix}$$

В случае 5 мы имеем

$$\frac{p}{p-\alpha}+\frac{2}{T-1}=0,$$

$$\frac{p}{p-\alpha T}+\frac{2T}{T-1}=0.$$

Откуда

$$p(T+1)-2\alpha=0,$$
$$p(3T-1)-2\alpha T^2=0.$$

Следовательно

$$\begin{vmatrix} T+1, & 1\\ 3T-1, & T^2\end{vmatrix}=0,$$

т. е.

$$T^3+T^2-3T-1=0.$$

Корни этого уравнения будут следующие:

$$1;\ -1+\sqrt{2};\ -1-\sqrt{2}.$$

Следовательно, для α могут быть три значения:

первое $\alpha=p$

второе $\alpha=\frac{p\sqrt{2}}{2}$

и третье $\alpha=-\frac{p\sqrt{2}}{2}$

Очевидно, что первое значение надо отбросить. Таким образом получается следующая таблица для координат в этом случае:

$$\begin{matrix}\pm p\sqrt{2}, & 2t, & 2q\\ p, & t(-1\pm\sqrt{2}), & q\\ p, & t, & q(-1\pm\sqrt{2}).\end{matrix}$$

Шестой случай приводится к следующим условиям

$$\frac{p}{p-\alpha T}+\frac{2}{T-1}=0,$$

$$\frac{p}{p-\alpha}+\frac{2T}{T-1}=0.$$

Отсюда

$$T=1;\ p=\alpha,$$

т. е шестой случай не может быть осуществлен.

К тому же заключению мы приходим в 7 и 8 случаях.

§ 10. В отношении бесконечно удаленных центров и осей мы должны рассмотреть следующие случаи:

1. H_1 в бесконечности
2. H_2 „ „
3. h_1 „ „
4. h_2 „ „

и комбинированные случаи.

ЭР01663

АВГНБ

Первое предположение, как мы раньше видели, влечет за собою

$$p+t+q=0$$

что дает возможность составить следующую таблицу координат

$$\begin{array}{lll} \alpha, & N-L, & L-M \\ M-N, & T(N-L), & L-M \\ M-N, & N-L, & T(L-M) \end{array}$$

Второе предположение дает нам

$$p+T(t+q)=0$$

откуда

$$T=-\frac{p}{t+q}$$

Следовательно, в этом случае таблицы координат будут:

$$\begin{array}{lll} \alpha, & t, & q \\ p(t+q), & -pt, & q(t+q) \\ p(t+q), & t(t+q), & -pq \end{array}$$

Третье предположение дает

$$p-\alpha=t(T-1)=q(T-1)$$

Отсюда

$$t=q$$
$$\alpha=p-t(T-1)$$

Таблица координат для этого случая будет

$$\begin{array}{lll} p-t(T-1), & t, & t \\ p, & Tt, & t \\ p, & t, & Tt \end{array}$$

При четвертом предположении

$$p-\alpha T=t(T-t)=q(T-1)$$

Следовательно

$$t=q$$
$$\alpha=\frac{p-t(T-1)}{T}$$

В виду этого таблица координат имеет вид

$$\begin{array}{lll} p-t(T-1), & tT, & tT \\ p, & tT, & t \\ p, & t, & Tt \end{array}$$

§ 11. Переходим к рассмотрению тригомологических треугольников. Выбирая, например, такой случай расположения треугольников, когда

$$ABC \times A_1C_1B_1 \times C_1B_1A_1 \times B_1A_1C_1,$$

тогда будем иметь, что координаты удовлетворяют условию

$$\alpha_1\beta_3\gamma_2=\alpha_2\beta_1\gamma_3=\alpha_3\beta_2\gamma_1 \qquad (34).$$

При этом условии таблицам координат вершин можно придать одну из форм

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{1}{\beta_3\gamma_2}, & \frac{1}{\gamma_3\alpha_2}, & \frac{1}{\alpha_3\beta_2} \\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2 \\ \alpha_3, & \beta_3, & \gamma_3 \end{array}\right\} (35) \quad \left.\begin{array}{lll} \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1 \\ \frac{1}{\beta_1\gamma_3}, & \frac{1}{\alpha_3\gamma_1}, & \frac{1}{\alpha_1\beta_3} \\ \alpha_3, & \beta_3, & \gamma_3 \end{array}\right\} (36) \quad \left.\begin{array}{lll} \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1 \\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2 \\ \frac{1}{\beta_2\gamma_1}, & \frac{1}{\gamma_2\alpha_1}, & \frac{1}{\alpha_2\beta_1} \end{array}\right\} (37)$$

ЭР01663

Отсюда на основании (4) мы имеем для координат центров гомологии

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_3\alpha_2,\ \beta_2\alpha_3,\ \gamma_3\alpha_2\\ \alpha_1\beta_3,\ \beta_1\beta_3,\ \gamma_3\beta_1\\ \alpha_1\gamma_2,\ \beta_2\gamma_1,\ \gamma_2\gamma_1\end{array}\right\} \qquad (38),$$

а для осей гомологии уравнения

$$\left.\begin{array}{lll} x & +\dfrac{(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)\alpha_2\gamma_3}{(\alpha_3\gamma_2-\gamma_3\alpha_2)\beta_2\beta_3}\,y+ & \dfrac{(\alpha_3\gamma_2-\gamma_3\alpha_2)\alpha_3\beta_2}{(\beta_3\alpha_2-\alpha_3\beta_2)\gamma_2\gamma_3}\,z=0\\ \dfrac{(\beta_1\alpha_3-\alpha_1\beta_3)\beta_1\gamma_3}{(\gamma_1\beta_3-\beta_1\gamma_3)\alpha_3\alpha_1}\,x+ & y & +\dfrac{(\beta_3\gamma_1-\beta_1\gamma_3)\beta_3\alpha_1}{(\beta_1\alpha_3-\alpha_1\beta_3)\gamma_3\gamma_1}\,z=0\\ \dfrac{(\gamma_1\alpha_2-\gamma_2\alpha_1)\gamma_1\beta_2}{(\gamma_2\beta_1-\beta_2\gamma_1)\alpha_1\alpha_2}\,x+ & \dfrac{(\gamma_2\beta_1-\beta_2\gamma_1)\gamma_2\alpha_1}{(\alpha_2\gamma_1-\gamma_2\alpha_1)\beta_1\beta_2}\,y+ & z=0\end{array}\right\} \qquad (39).$$

К подобным уравнениям можно притти, исходя из несколько иных соображений. Если выбрать треугольник ABC и два центра гомологии H_1 и H_2, соответствующие треугольникам $A_1B_1C_1$ и $B_1C_1A_1$, то мы вполне определим положение треугольника $A_1B_1C_1$.

Действительно, пусть координаты точек H_1 и H_2 будут

$$p_1,\ t_1,\ q_1$$
$$p_2,\ t_2,\ q_2$$

Вершины треугольника $A_1B_1C_1$ суть точки пересечения следующих прямых

$$AH_1 \text{ и } CH_2$$
$$BH_1 \text{ и } AH_2$$
$$CH_1 \text{ и } BH_2$$

и следовательно координаты вершин треугольника $A_1B_1C_1$ определятся следующим образом

$$p_2t_1,\ t_1t_2,\ q_1t_2$$
$$p_1q_2,\ t_2q_1,\ q_1q_2$$
$$p_1p_2,\ t_1p_2,\ q_2p_1$$

При таких предположениях третий центр гомологии имеет координаты

$$\frac{1}{q_1t_2},\quad \frac{1}{p_1q_2},\quad \frac{1}{t_1p_2},$$

а уравнения осей будут

$$\frac{xt_2}{p_1t_2-t_1p_2}+\frac{yq_2}{t_1q_2-q_1t_2}+\frac{zp_2}{q_1p_2-p_1q_2}=0$$

$$\frac{xq_1}{q_1p_2-p_1q_2}+\frac{yp_1}{p_1t_2-t_1p_2}+\frac{zt_1}{t_1q_2-q_1t_2}=0$$

$$\frac{x}{p_1p_2(t_1q_2-t_2q_1)}+\frac{y}{t_1t_2(q_1p_2-q_2p_1)}+\frac{z}{q_1q_2(p_1t_2-p_2t_1)}=0$$

ЭР01663

§ 12. Тригомологические треугольники могут быть разделены на две группы в зависимости от того, находятся их центры гомологии на одной прямой или нет.

Начнем с первого случая. Чтобы центры гомологии находились на одной прямой, а вследствие этого оси гомологии пересекались в одной точке, необходимо условие

$$\begin{vmatrix} \alpha_3\alpha_2, & \beta_2\alpha_3, & \gamma_3\alpha_2 \\ \alpha_1\beta_3, & \beta_1\beta_3, & \gamma_3\beta_1 \\ \alpha_1\gamma_2, & \beta_2\gamma_1, & \gamma_2\gamma_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (40)$$

или в распространенном виде, принимая во внимание (34),

$$\frac{1}{\alpha_1\beta_2\gamma_3} + \frac{1}{\alpha_2\beta_3\gamma_1} + \frac{1}{\alpha_3\beta_1\gamma_2} = \frac{1}{\alpha_1\beta_3\gamma_2} + \frac{1}{\alpha_2\beta_1\gamma_3} + \frac{1}{\alpha_3\beta_2\gamma_1} \qquad (41).$$

Придадим равенству (41) другую форму. Нетрудно заметить, что таблицы (35), (36) и (37) для координат вершин треугольников могут быть заменены таблицей

$$\left.\begin{matrix} lp, & mq, & nt \\ lt, & mp, & nq \\ lq, & mt, & np \end{matrix}\right\} \qquad (42)$$

с координатами центров гомологии

$$\left.\begin{matrix} \frac{l}{p}, & \frac{m}{t}, & \frac{n}{q} \\ \frac{l}{q}, & \frac{m}{p}, & \frac{n}{t} \\ \frac{l}{t}, & \frac{m}{q}, & \frac{n}{p} \end{matrix}\right\} \qquad (43)$$

и с уравнениями осей гомологии

$$\left.\begin{matrix} \frac{x}{l(p^2-tq)} + \frac{y}{m(t^2-qp)} + \frac{z}{n(q^2-pt)} = 0 \\ \frac{x}{l(q^2-pt)} + \frac{y}{m(p^2-tq)} + \frac{z}{n(t^2-qp)} = 0 \\ \frac{x}{l(t^2-qp)} + \frac{y}{m(q^2-pt)} + \frac{z}{n(p^2-tq)} = 0 \end{matrix}\right\} \qquad (44).$$

При этих обозначениях равенство (41) принимает форму

$$\frac{1}{p^3} + \frac{1}{t^3} + \frac{1}{q^3} = \frac{3}{ptq} \qquad (45)$$

или

$$\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{t} + \frac{1}{q}\right) \cdot \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{q^2} - \frac{1}{tq} - \frac{1}{qp} - \frac{1}{pt}\right) = 0 \qquad (46).$$

Таким образом нахождение центров гомологии на одной прямой имеет место в случае

1) $$\frac{1}{p} + \frac{1}{t} + \frac{1}{q} = 0 \qquad (47)$$

ЭР01663

или в случае

$$2) \qquad \frac{1}{p^2}+\frac{1}{t^2}+\frac{1}{q^2}-\frac{1}{tq}-\frac{1}{qp}-\frac{1}{pt}=0 \qquad (48).$$

Если p, t, q подобраны так, что

$$\left.\begin{aligned} p&=\frac{1}{M-N}\\ t&=\frac{1}{N-L}\\ q&=\frac{1}{L-M}\end{aligned}\right\} \qquad (49),$$

то, очевидно, этими значениями удовлетворяется равенство (47) при любых L, M, N.

Таким образом имеем, что треугольник ABC и треугольник $A_1B_1C_1$ с координатами вершин

$$\left.\begin{aligned} &\frac{l}{M-N},\ \frac{m}{L-M},\ \frac{n}{N-L}\\ &\frac{l}{N-L},\ \frac{m}{M-N},\ \frac{n}{L-M}\\ &\frac{l}{L-M},\ \frac{m}{N-L},\ \frac{n}{M-N}\end{aligned}\right\} \qquad (50)$$

тригомологичны и имеют центры гомологии на одной прямой.

Отметим, что центры гомологии имеют координаты

$$\left.\begin{aligned} &l(M-N),\ m(N-L),\ n(L-M)\\ &l(L-M),\ m(M-N),\ n(N-L)\\ &l(N-L),\ m(L-M),\ n(M-N)\end{aligned}\right\} \qquad (51),$$

а оси гомологии — уравнения

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x(M-N)}{l}+\frac{y(N-L)}{m}+\frac{z(L-M)}{n}=0\\ &\frac{x(L-M)}{l}+\frac{y(M-N)}{m}+\frac{z(N-L)}{n}=0\\ &\frac{x(N-L)}{l}+\frac{y(L-M)}{m}+\frac{z(M-N)}{n}=0\end{aligned}\right\} \qquad (52).$$

Отметим также, что уравнение той прямой, на которой находятся центры гомологии, будет

$$\frac{x}{l}+\frac{y}{m}+\frac{z}{n}=0 \qquad (53)$$

и координаты центра пересечения осей гомологии будут

$$l,\ m,\ n \qquad (54).$$

Выражения (53) и (54) дают нам, что в рассматриваемом случае прямая центров и точка пересечения осей суть трилинейные поляра и полюс.

Что касается случая второго, выраженного уравнением (48), то очевидно, что оно сводится к одной из следующих комбинаций

ЭР01663

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{p}&=\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{q}\right)\cdot\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{p}&=\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{q}\right)\cdot\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\right\}\qquad(55),$$

т. е. вещественных значений p, t, q одновременно иметь не могут.

§ 13. То обстоятельство, что линия центров и точка пересечения осей суть трилинейные поляра и полюс, дает удобный прием построения треугольника $A_1B_1C_1$, находящегося с данным треугольником ABC в указанном специальном гомологическом соотношении.

Далее по виду формул (53) и (54) можно заключить, что линия центров не может проходить через точку пересечения осей.

Наконец, сопоставление формул (51) и (52) приводит нас к выводу, что центры гомологии в этом случае не могут находиться на соответствующих осях.

§ 14. Общие формулы координат треугольников в рассматриваемом специальном гомологическом соотношении можно также получить, исходя из равенств (41).

Положим

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\alpha_1}&=1+\omega A_1;\quad \frac{1}{\beta_1}=1+\omega B_1;\quad \frac{1}{\gamma_1}=1+\omega C_1\\ \frac{1}{\alpha_2}&=1+\omega A_2;\quad \frac{1}{\beta_2}=1+\omega B_2;\quad \frac{1}{\gamma_2}=1+\omega C_2\\ \frac{1}{\alpha_3}&=1+\omega A_3;\quad \frac{1}{\beta_3}=1+\omega B_3;\quad \frac{1}{\gamma_3}=1+\omega C_3\end{aligned}\right\}\qquad(56).$$

Получим

$$\begin{aligned}&(1+\omega A_1)(1+\omega B_2)(1+\omega C_3)+(1+\omega A_2)(1+\omega B_3)(1+\omega C_1)+\\&+(1+\omega A_3)(1+\omega B_1)(1+\omega C_2)=(1+\omega A_1)(1+\omega B_3)(1+\omega C_2)+\\&+(1+\omega A_2)(1+\omega B_1)(1+\omega C_3)+(1+\omega A_3)(1+\omega B_2)(1+\omega C_1)\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}&\omega(A_1B_2C_3+A_2B_3C_1+A_3B_1C_2-A_1B_3C_2-A_2B_1C_3-A_3B_2C_1)=\\&=A_1(B_3+C_2-B_2-C_3)+A_2(B_1+C_3-B_3-C_1)+\\&+A_3(B_2+C_1-B_1-C_2)+B_3C_2-B_2C_3+B_1C_3-B_3C_1+B_2C_1-B_1C_2\end{aligned}\qquad(57).$$

Подставляя ω из (57) в (56), мы получим значение интересующих нас координат. Действительно, из (57) имеем

$$\omega=\begin{vmatrix}0, & 1, & 1, & 1\\ 1, & A_1, & A_2, & A_3\\ 1, & B_1, & B_2, & B_3\\ 1, & C_1, & C_2, & C_3\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}A_1, & A_2, & A_3\\ B_1, & B_2, & B_3\\ C_1, & C_2, & C_3\end{vmatrix}=\triangle_4:\triangle_3.$$

Следовательно, таблица координат приобретает вид

$$\begin{aligned}&\triangle_3+\triangle_4A_1,\ \triangle_3+\triangle_4B_1,\ \triangle_3+\triangle_4C_1\\&\triangle_3+\triangle_4A_2,\ \triangle_3+\triangle_4B_2,\ \triangle_3+\triangle_4C_2\\&\triangle_3+\triangle_4A_3,\ \triangle_3+\triangle_4B_3,\ \triangle_3+\triangle_4C_3.\end{aligned}$$

§ 15. Переходим к следующему случаю, когда центры гомологии не лежат на одной прямой. Здесь мы можем выделить следующие расположения:

ЭР01663

1) Центры гомологии лежат на соответствующих осях гомологии.
2) Центры гомологии лежат на несоответствующих осях гомологии.
3) Центры гомологии суть точки пересечения осей гомологии.

I. Остановимся на первом расположении. Обозначим центры и оси гомологии пар треугольников ABC и $A_1C_1B_1$, ABC и $C_1B_1A_1$, ABC и $B_1A_1C_1$ через

$$H_a, \quad h_a$$
$$H_b, \quad h_b$$
$$H_c, \quad h_c$$

Нахождение H_a на h_a аналитически выражается на основании (43) и (44) таким образом

$$\frac{1}{p(p^2-tq)}+\frac{1}{t(t^2-qp)}+\frac{1}{q(q^2-pt)}=0 \qquad (58).$$

Но точно таким же аналитическим выражением будет обусловливаться нахождение центра H_b на оси h_b и центра H_c на оси h_c. Следовательно, если один центр гомологии находится на соответствующей оси, то это же имеет место и для двух других центров.

II. Во втором случае может иметь место несколько разновидностей. Первой из них является та, когда H_a лежит на h_b, второй та, когда H_a лежит на h_c.

Аналитическое условие первой разновидности будет

$$\frac{1}{p(q^2-pt)}+\frac{1}{t(p^2-tq)}+\frac{1}{q(t^2-qp)}=0 \qquad (59).$$

Аналитическое условие второй разновидности будет

$$\frac{1}{p(t^2-qp)}+\frac{1}{t(q^2-pt)}+\frac{1}{q(p^2-tp)}=0 \qquad (60).$$

Необходимо опять таки отметить, что, если H_a находится на h_b, то H_b и H_c находятся на h_c и h_a, и аналогично для случая нахождения H_a на h_c.

III. Наконец, третий случай осуществляется наличием одновременных условий (59) и (60). Эти условия приводятся к виду

$$\frac{p^2}{p^2-tq}=\frac{t^2}{t^2-qp}=\frac{q^2}{q^2-pt} \qquad (61).$$

И здесь, если две оси гомологии дают в пересечении центр гомологии, то это обстоятельство имеет место и для других пар осей.

Равным образом одновременное существование условий (58) и (59); (59) и (60) дает место случаям, относящимся к третьей рубрике, указанной в начале параграфа. Эти подслучаи сводятся к следующим аналитическим условиям:

$$t(p^2-tq)=q(t^2-qp)=p(q^2-pt) \qquad (62),$$
$$q(p^2-tq)=p(t^2-qp)=t(q^2-pt) \qquad (63).$$

Схематически все случаи могут быть изображены так

ЭР01663

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & H_a h_a, \quad H_b h_b, \quad H_c h_c \\ \text{II.} & \left\{\begin{array}{lll} H_b h_a, & H_c h_b, & H_a h_c \\ H_c h_a, & H_a h_b, & H_b h_c \end{array}\right. \\ \text{III.} & \left\{\begin{array}{lll} H_b H_c h_a, & H_c H_a h_b, & H_a H_b h_c \\ H_a H_b h_a, & H_b H_c h_b, & H_c H_a h_c \\ H_a H_c h_a, & H_b H_a h_b, & H_c H_b h_c \end{array}\right. \end{array}\right\} \quad (64).$$

§ 16. Перейдем к рассмотрению частных случаев.

Начнем с того, схема которого

$$H_a h_a, \quad H_b h_b, \quad H_c h_c$$

и аналитическое условие которого

$$\frac{1}{p(p^2-tq)}+\frac{1}{t(t^2-qp)}+\frac{1}{q(q^2-pt)}=0$$

Положим теперь

$$\left.\begin{array}{l} p(p^2-tq)=\dfrac{1}{M-N} \\ t(t^2-qp)=\dfrac{1}{N-L} \\ q(q^2-pt)=\dfrac{1}{L-M} \end{array}\right\} \quad (65),$$

где L, M, N произвольны.

Уравнения (65) можно преобразовать следующим образом

$$\left.\begin{array}{l} p^3=\dfrac{1}{M-N}+ptq \\ t^3=\dfrac{1}{N-L}+ptq \\ q^3=\dfrac{1}{L-M}+ptq \end{array}\right\} \quad (66).$$

Перемножая почленно эти уравнения, получим

$$p^3t^3q^3=\frac{1}{M-N}\cdot\frac{1}{N-L}\cdot\frac{1}{L-M}+$$

$$+ptq\left(\frac{1}{N-L}\cdot\frac{1}{L-M}+\frac{1}{L-M}\cdot\frac{1}{M-N}+\frac{1}{M-N}\cdot\frac{1}{N-L}\right)+$$

$$+p^2t^2q^2\left(\frac{1}{M-N}+\frac{1}{N-L}+\frac{1}{L-M}\right)+p^3t^3q^3$$

или после упрощения

$$p^2t^2q^2(MN+NL+LM-L^2-M^2-N^2)+1=0$$

Отсюда

$$ptq=\pm\sqrt{\frac{1}{L^2+M^2+N^2-MN-NL-LM}}$$

Подставляя это значение ptq в формулу (66), имеем

ЭР01663

$$p^3 = \frac{1}{M-N} \pm \sqrt{\frac{1}{L^2+M^2+N^2-MN-NL-LM}}$$

$$t^3 = \frac{1}{N-L} \pm \sqrt{id}$$

$$q^3 = \frac{1}{L-M} \pm \sqrt{id} \qquad (67).$$

Отсюда получаем значения p, t, q и, следовательно, имеем общие формулы для координат треугольника в интересующем нас случае.

§ 17. Переходим к рассмотрению других случаев, намеченных в § 15 и данных в схеме (64). В отношении их возможно показать, что все остальные случаи, кроме рассмотренного в § 16, невозможны. Действительно, все разбираемые случаи возможны при условиях, выраженных формулами (59) и (60). Но последние невозможны по следующей причине. Положим

$$p(q^2-pt) = a$$
$$t(p^2-tq) = b$$
$$q(t^2-qp) = c$$

Имеем $$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$$

и $$a+b+c = 0$$

Отсюда как следствие получаем

$$a^2+b^2+c^2 = 0.$$

Следовательно, a, b и c одновременно не могут быть вещественными, а потому не могут быть одновременно вещественными и p, t, q.

Невозможность (59) и (60) влечет за собой невозможность (61), (62) и (63).

§ 18. Центры гомологии могут лежать все не в бесконечности, один в бесконечности, два в бесконечности и три в бесконечности.

Аналитическое условие того, что один из центров лежит в бесконечности, сводится к следующему

$$\frac{l}{p} + \frac{m}{t} + \frac{n}{q} = 0 \qquad (68).$$

Простейшие значения, которые можно придать l, m, n, будут следующие

$$\left.\begin{aligned} l &= p(M-N) \\ m &= t(N-L) \\ n &= q(L-M) \end{aligned}\right\} \qquad (69).$$

Следовательно, треугольник, имеющий вершины с координатами

$$\left.\begin{aligned} &p^2(M-N), \quad tq(N-L), \quad qt(L-M) \\ &pt(M-N), \quad pt(N-L), \quad q^2(L-M) \\ &pq(M-N), \quad t^2(N-L), \quad pq(L-M) \end{aligned}\right\} \qquad (70),$$

будет тригомологичен треугольнику ABC, причем один из центров гомологии лежит в бесконечности.

ЭР01663

Аналитическое условие, выражающее, что два центра гомологии лежат в бесконечности, сводится к следующему

$$\left.\begin{aligned}\frac{l}{p}+\frac{m}{t}+\frac{n}{q}=0\\ \frac{l}{q}+\frac{m}{p}+\frac{n}{t}=0\end{aligned}\right\} \tag{71}$$

Отсюда $$l:m:n=\frac{pq-t^2}{t}:\frac{tp-q^2}{q}:\frac{qt-p^2}{p} \tag{72},$$

и общие формулы координат будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned}&\frac{p(pq-t^2)}{t},\quad tp-q^2,\quad \frac{qt-p^2}{p}\\ &pq-t^2,\quad \frac{p(tq-p^2)}{q},\quad \frac{q(qt-p^2)}{p}\\ &\frac{q(qt-p^2)}{t},\quad \frac{t(tp-q^2)}{q},\quad qt-p^2\end{aligned}\right\} \tag{73}$$

Аналитическое условие, выражающее, что три центра гомологии лежат в бесконечности, сводится к следующему

$$\left.\begin{aligned}\frac{l}{p}+\frac{m}{t}+\frac{n}{q}=0\\ \frac{l}{q}+\frac{m}{p}+\frac{n}{t}=0\\ \frac{l}{t}+\frac{m}{q}+\frac{n}{p}=0\end{aligned}\right\} \tag{74}$$

или

$$\begin{vmatrix}\frac{1}{p}, & \frac{1}{t}, & \frac{1}{q}\\ \frac{1}{q}, & \frac{1}{p}, & \frac{1}{t}\\ \frac{1}{t}, & \frac{1}{q}, & \frac{1}{p}\end{vmatrix}=0;\quad \begin{vmatrix}l, & m, & n\\ m, & n, & l\\ n, & l, & m\end{vmatrix}=0$$

или, наконец,

$$\frac{1}{p^3}+\frac{1}{t^3}+\frac{1}{q^3}=\frac{3}{ptq};\quad l^3+m^3+n^3=3mnl \tag{75}.$$

Таким образом три центра гомологии могут находиться в бесконечности при условии

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{p}+\frac{1}{t}+\frac{1}{q}=0\\ l+m+n=0\end{aligned}\right\} \tag{76}.$$

Если положить

$$\left.\begin{aligned}&p=\frac{1}{T-Q};\quad t=\frac{1}{Q-P};\quad q=\frac{1}{P-T}\\ &l=M-N;\quad m=N-L;\quad n=L-M\end{aligned}\right\} \tag{77},$$

ЭР01663

то координаты вершин треугольника будут

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{M-N}{T-Q}, & \frac{N-L}{P-T}, & \frac{L-M}{Q-P} \\ \frac{M-N}{Q-P}, & \frac{N-L}{T-Q}, & \frac{L-M}{P-T} \\ \frac{M-N}{P-T}, & \frac{N-L}{Q-P}, & \frac{L-M}{T-Q} \end{array}\right\} \quad (78).$$

§ 19. Из осей гомологии в бесконечности может лежать одна ось. Условием нахождения одной оси в бесконечности является

$$\frac{1}{l(p^2-tq)}+\frac{1}{m(t^2-qp)}+\frac{1}{n(q^2-pt)}=0 \quad (79).$$

Этому равенству можно удовлетворить, если положить

$$l=\frac{1}{(p^2-tq)(M-N)}; \quad m=\frac{1}{(t^2-qp)(N-L)};$$

$$n=\frac{1}{(q^2-pt)(L-M)} \quad (80).$$

Тогда координаты вершин определяются по формулам (42) вместе с формулами (80).

§ 20. Перейдем к рассмотрению тетрагомологических треугольников. Допустим, что треугольник ABC гомологичен не только $A_1C_1B_1$, $C_1B_1A_1$, $B_1A_1C_1$, но и $A_1B_1C_1$, и рассмотрим к каким аналитическим условиям приводит это обстоятельство.

Для получения этих выражений необходимо члены таблиц (35), (36) и (37) подчинить условию

$$\alpha_3\beta_1\gamma_2=\alpha_2\beta_3\gamma_1$$

Будем иметь

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\alpha_3\gamma_2}{\alpha_2\gamma_3}=\frac{\alpha_2\beta_3}{\alpha_3\beta_2} \\ \frac{\alpha_3\beta_1}{\alpha_1\beta_3}=\frac{\beta_3\gamma_1}{\beta_1\gamma_3} \\ \frac{\beta_1\gamma_2}{\beta_2\gamma_1}=\frac{\alpha_2\gamma_1}{\alpha_1\gamma_2} \end{array}\right\} \quad (81).$$

Отсюда

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\alpha_3^2}{\beta_3\gamma_3}=\frac{\alpha_2^2}{\beta_2\gamma_2} \\ \frac{\beta_1^2}{\alpha_1\gamma_1}=\frac{\beta_3^2}{\gamma_3\alpha_3} \\ \frac{\beta_2^2}{\beta_2\alpha_2}=\frac{\gamma_1^2}{\alpha_1\beta_1} \end{array}\right\} \quad (82).$$

Таково условие, чтобы два треугольника были четырежды гомологичны в A.

Для того, чтобы треугольник был тетрагомологическим в B, т. е. был бы помимо указанных выше треугольников гомологичен треугольнику $B_1C_1A_1$, необходимы условия

ЭР01663

$$\left.\begin{aligned} \frac{\alpha_1^2}{\beta_1\gamma_1} &= \frac{\alpha_3^2}{\beta_3\gamma_3} \\ \frac{\beta_2^2}{\gamma_2\alpha_2} &= \frac{\beta_1^2}{\gamma_1\alpha_1} \\ \frac{\gamma_3^2}{\alpha_3\beta_3} &= \frac{\gamma_2^2}{\alpha_2\beta_2} \end{aligned}\right\} \qquad (83).$$

Подобный же вид имеет условие четырехкратной гомологии в C.

§ 21. Остановимся на одном из случаев четырехкратной гомологии и поставим задачей определение координат центров и уравнений осей гомологии. Беря случай гомологии в A, допустим временно, что координаты треугольника $A_1B_1C_1$ будут

$$\left.\begin{matrix} 1, & \beta_1, & \gamma_1 \\ \alpha_2, & 1, & \gamma_2 \\ \alpha_3, & \beta_3, & 1 \end{matrix}\right\} \qquad (84).$$

При таких координатах условие (34) преобразуется в

$$\beta_3\gamma_2 = \alpha_2\beta_1 = \alpha_3\gamma_1$$

а условие (3) в

$$\alpha_3\beta_1\gamma_2 = \alpha_2\beta_3\gamma_1.$$

Следовательно таблице (84) можно дать форму

$$\left.\begin{matrix} 1, & \dfrac{\alpha_2\beta_3^2}{\alpha_3^2}, & \dfrac{\alpha_2^2\beta_3^2}{\alpha_3^3} \\ \alpha_2, & 1, & \dfrac{\alpha_2^2\beta_3}{\alpha_3^2} \\ \alpha_3, & \beta_3, & 1 \end{matrix}\right\} \qquad (85)$$

или

$$\left.\begin{matrix} \alpha_3^3, & \alpha_2\alpha_3\beta_3^2, & \alpha_2^2\beta_3^2 \\ \alpha_2\alpha_3^2, & \alpha_3^2, & \alpha_2^2\beta_3 \\ \alpha_3, & \beta_3, & 1 \end{matrix}\right\} \qquad (86)$$

или

$$\left.\begin{matrix} \alpha_3^2\alpha_3, & \alpha_2\beta_3 \cdot \alpha_3\beta_3, & \alpha_2\beta_3 \cdot \alpha_2\beta_3 \\ \alpha_3^2 \cdot \alpha_2\beta_3, & \alpha_3\beta_3 \cdot \alpha_3, & \alpha_2\beta_3 \cdot \alpha_2\beta_3 \\ \alpha_3^2 \cdot \alpha_2\beta_3, & \alpha_3\beta_3 \cdot \alpha_2\beta_3, & \alpha_2\beta_3 \cdot \alpha_3 \end{matrix}\right\} \qquad (87).$$

Полагая

$$\left.\begin{aligned} \alpha_3 &= p \\ \alpha_2\beta_3 &= t \end{aligned}\right\} \qquad (88) \qquad \left.\begin{aligned} l &= \alpha_3^2 \\ m &= \alpha_3\beta_3 \\ n &= \alpha_2\beta_3 \end{aligned}\right\} \qquad (89),$$

мы можем представить интересующие нас координаты в форме

$$\left.\begin{matrix} lp, & mt, & nt \\ lt, & mp, & nt \\ lt, & mt, & np \end{matrix}\right\} \qquad (90).$$

Отсюда мы можем получить координаты центров и уравнения осей в следующем виде

ЭР01663

ДВГНБ

$$\left.\begin{array}{lll} l, & m, & n \\ \frac{l}{p}, & \frac{m}{t}, & \frac{n}{t} \\ \frac{l}{t}, & \frac{m}{p}, & \frac{n}{t} \\ \frac{l}{t}, & \frac{m}{t}, & \frac{n}{p} \end{array}\right\} \quad (91),$$

$$\frac{x}{l} + \frac{y}{m} + \frac{z}{n} = 0 \quad (92),$$

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{xt}{l} + \frac{y(t+p)}{m} + \frac{z(t+p)}{n} = 0 \\ \frac{x(t+p)}{l} - \frac{yt}{m} + \frac{z(t+p)}{n} = 0 \\ \frac{x(t+p)}{l} + \frac{y(t+p)}{m} - \frac{zt}{n} = 0 \end{array}\right\} \quad (93).$$

Владивосток.
Апрель — май 1935 г.

ДВГНБ

ЭР01663

П. М. Кутейников.

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА АНИЗОТРОПНО-ГИРОТРОПНОЙ СРЕДЫ.

RELATIVISTIC ELECTRODYNAMICS OF ANISOTROPIC AND HYROTROPIC MEDIUM.

By P. M. Kuteinikov.

ВВЕДЕНИЕ.

Допустим линейные соотношения

$$D_i = \varepsilon_{ik}(\nu)E_k \text{ и } H_i = \overset{-1}{\mu}_{ik}(\nu)B_k \quad (ik = 1,2,3) \qquad (1)^1$$

определяют комплексные величины основных векторов электромагнитного поля: $\vec{D}$ — вектор смещения, $\vec{E}$ — напряженность электрического поля, $\vec{B}$ — вектор индукции и $\vec{H}$ — напряженность магнитного поля. $\varepsilon_{ik}(\nu)$ и $\overset{-1}{\mu}_{ik}(\nu)$ — коэффициенты пропорциональности в этом уравнении, в общем случае, также являются комплексными величинами. Если рассматриваемая среда обладает гиротропией (магнитным вращением плоскости поляризации[2] или естественным[3]), то $\varepsilon_{ik}(\nu)$ и $\mu_{ik}(\nu)$, как известно, удовлетворяют Hermite'вским свойствам симметрии

$$\varepsilon_{ik}(\nu) = \bar{\varepsilon}_{ki}(\nu), \quad \overset{-1}{\mu}_{ik}(\nu) = \overset{-1}{\bar{\mu}}_{ki}(\nu) \qquad (2)^4.$$

Материальные константы [диэлектрическая постоянная $\varepsilon_{ik}(\nu)$ и магнитная проницаемость $\overset{-1}{\mu}_{ik}(\nu)$] определяются из следующих формул:

$$\varepsilon_{ik}(\nu) = \delta_{ik} + 4\pi[\beta_{ik}(\nu) + i\gamma_{ik}(\nu)], \quad \overset{-1}{\mu}_{ik}(\nu) = \delta_{ik} - 4\pi[\eta_{ik}(\nu) + i\xi_{ik}(\nu)],$$

где $\beta_{ik}(\nu) = \beta_{ki}(\nu)$; $\gamma_{ik}(\nu) = -\gamma_{ki}(\nu)$ и $\eta_{ik}(\nu) = \eta_{ki}(\nu)$; $\xi_{ik}(\nu) = -\xi_{ki}(\nu)$ являются трехмерными тензорами электрической поляризации и магнитной восприимчивости, соответственно, δ_{ik} — единичный тензор, равный $+1$ при $i = k$ и 0 при $i \neq k$.

---

[1] Я. И. Френкель. Электродинамика, т. II, стр. 237, 1935 г.

[2] Я. И. Френкель. Электродинамика, т. II, стр. 159, 1935 г.

[3] Max. Born. Естественное вращение плоскости поляризации. Optik. Ein Lehrbuch der Elektromagnetischen Lichttheorie. Berlin. Verlag von Julius Springer. 1933.

[4] Штрих означает, что данные величины взяты комплексно-сопряженными к $\varepsilon_{ik}(\nu)$ и $\overset{-1}{\mu}_{ik}(\nu)$.

ЭР01663

Определяя $\vec{G}^э$ —электрический и $\vec{G}^m$—магнитный векторы гирации, характеризующие гиротропию среды, формулами

$$\gamma_{ik}(\nu) = l_{ike}G_e^э\,,\quad \xi_{ik}(\nu) = l_{ike}G_e^m \tag{3},$$

получим

$$\varepsilon_{ik}(\nu) = \delta_{ik} + 4\pi[\beta_{ik}(\nu) + l_{ike}G_e^э];\ \mu_{ik}^{-1}(\nu) = \delta_{ik} - 4\pi[\eta_{ik}(\nu) + l_{ike}G_e^m] \tag{4}.$$

На основании этого уравнения (1) запишутся:

$$D_i = \delta_{ik}E_k + 4\pi[\beta_{ik}(\nu) + l_{ike}G_e^э]E_k\,,\ H_i = \delta_{ik}B_k - 4\pi[\eta_{ik}(\nu) + l_{ike}G_e^m]B_k \tag{5}.$$

Здесь l_{ike} — $(ike = 1, 2, 3)$ — единичный антисимметричный тензор 3-го ранга, компоненты которого отличны от нуля, если все индексы различны и равны ± 1, если порядок индексов i, k, e приводится к нормальному порядку 1, 2, 3 четным или нечетным числом транспозиций.

Рассмотрим теперь тензориальные соотношения, определяемые уравнением (1), в связи с координатной системой K и K^0. Эти координатные системы выбираем так. K—любая „покоящаяся" координатная система, направления осей которой остаются произвольными в самом общем виде относительно тензоров $\beta_{ik}(\nu)$ и $\eta_{ik}(\nu)$. Это означает, что учитывается и тот случай, когда оси симметрии тензоров $\beta_{ik}(\nu)$ и $\eta_{ik}(\nu)$ могут и не совпадать друг с другом. K^0—главная „покоящаяся" координатная система, направления осей которой совпадают с осями симметрии тензоров $\beta_{ik}(\nu)$ и $\eta_{ik}(\nu)$. В координатных осях, например в системе K^0, соотношения (1) запишутся

$$D_1 = \varepsilon_1 E_1 + i4\pi G_3^э E_2 - i4\pi G_2^э E_3;\quad H_1 = \frac{1}{\mu_1}B_1 - i4\pi G_3^m B_2 + i4\pi G_2^m B_3$$

$$D_2 = -i4\pi G_3^э E_1 + \varepsilon_2 E_2 + i4\pi G_1^э E_3\,;\ H_2 = i4\pi G_3^m B_1 + \frac{1}{\mu_2}B_2 - i4\pi G_1^m B_3 \tag{6}$$

$$D_3 = i4\pi G_2^э E_1 - i4\pi G_1^э E_2 + \varepsilon_3 E_3;\quad H_3 = -i4\pi G_2^m B_1 + i4\pi G_1^m B_2 + \frac{1}{\mu_3}B_3$$

§ 1.

Четырехмерное выражение соотношений (1) будем рассматривать также в линейной форме, т. е.

$$f^{ik} = \frac{1}{2}S^{ikem}F_{em} = \frac{1}{2}(M^{ikem} + iL^{ikem})F_{em} \tag{1, 1}$$

или, в разрешенной форме относительно E_{ik},

$$F_{ik} = \frac{1}{2}T_{ikem}f^{em} = \frac{1}{2}(N_{ikem} + iK_{ikem})f^{em} \tag{1, 2},$$

где $\vec{E} \to (F_{14}, F_{24}, F_{34})$, $\vec{B} \to (F_{23}, F_{31}, F_{12})$, $F_{ik} = -F_{ki}$

$-\vec{D} \to (f^{14}, f^{24}, f^{34})$, $\vec{H} \to (f^{23}, f^{31}, f^{12})$, $f^{ik} = -f^{ki}$

и $T_{ikem} = N_{ikem} + iK_{ikem}$ есть обратный тензор к $S^{ikem} = M^{ikem} + iL^{ikem}$.

Уравнения (1, 1) и (1, 2) справедливы в любой координатной системе. Очевидно, для того, чтобы изучение поля и физического состояния материи можно было бы свести к заданию тензоров

ЭР01663

f^{ik}, F_{ik} и S^{ikem}, необходимо наложить определенные ограничения на тензор S^{ikem}, т. е. тензор диэлектрической постоянной и магнитной проницаемости.

В общем случае (т. е. в системе K) необходимо потребовать, чтобы:

$$M^{iiem} = M^{emii} = L^{iiem} = L^{emii} = N_{iiem} = N_{emii} = K_{iiem} = K_{emii} = 0$$
$$M^{iiim} = M^{iimi} \ldots = L^{iiim} = L^{iimi} \ldots = N_{iiim} = N_{iimi} \ldots = K_{iiim} = K_{iimi} \ldots = 0$$
$$M^{iiii} = L^{iiii} = N_{iiii} = K_{iiii} = 0$$
$$M^{\alpha\beta\gamma 4} = M^{\alpha\beta 4\gamma} \ldots = L^{\alpha\beta\gamma 4} \ldots = N_{\alpha\beta\gamma 4} \ldots = K_{\alpha\beta\gamma 4} \ldots = 0$$
$$(\alpha\beta\gamma = 1, 2, 3)$$

Из сравнения (1, 1), (1, 2) с (1), пользуясь при этом свойствами симметрии тензоров f^{ik}, F_{ik} и $\varepsilon_{ik}(\nu)$, $\mu_{ik}^{-1}(\nu)$, находим, что S^{ikem} и T_{ikem} обладают следующими инвариантными свойствами симметрии:

$$S^{ikem} = -S^{ikme} = -S^{kiem} = \overline{S}^{emik}$$
$$T_{ikem} = -T_{ikme} = -T_{kiem} = \overline{T}_{emik} \qquad (1, 3).^1$$

Полученные свойства симметрии следует понимать как обобщение Hermite'вских свойств симметрии на случай тензоров 4-го ранга (бивектортензоров).

Из тензориальных соотношений (1, 1), (1, 2) и свойств симметрии (1, 3) легко показать, что

$$\frac{1}{2} S^{ik\alpha\beta} \overline{T}_{em\alpha\beta} = \delta_e^i \delta_m^k - \delta_m^i \delta_e^k \qquad (1, 4),$$

где δ_k^i — смешанный четырехмерный единичный тензор, равный $+1$ при $i = k$ и 0 при $i \neq k$.

В частном случае в „покоящейся" и главной координатной системе K^0 необходимо, чтобы компоненты вещественных тензоров M, L, N и K имели следующие значения:

$$M^{1414} = M^{4141} = -M^{1441} = -M^{4114} = -\varepsilon_1$$
$$M^{2424} = M^{4242} = -M^{2442} = -M^{4224} = -\varepsilon_2$$
$$M^{3434} = M^{4343} = -M^{3443} = -M^{4334} = -\varepsilon_3$$
$$L^{1424} = -L^{2414} = -L^{4124} = -L^{1442} = L^{4142} = -4\pi G_3^e$$
$$L^{1434} = -L^{3414} = -L^{4134} = -L^{1443} = L^{4143} = 4\pi G_2^e$$
$$L^{2434} = -L^{3414} = -L^{4234} = -L^{2443} = L^{4243} = -4\pi G_1^e$$
$$M^{2323} = M^{3232} = -M^{2332} = -M^{3223} = \frac{1}{\mu_1}$$
$$M^{1313} = M^{3131} = -M^{1331} = -M^{3113} = \frac{1}{\mu_2}$$
$$M^{1212} = M^{2121} = -M^{1221} = -M^{2112} = \frac{1}{\mu_3}$$
$$L^{2331} = -L^{3123} = -L^{3231} = -L^{2313} = L^{3213} = -4\pi G_3^m$$
$$L^{2312} = -L^{1223} = -L^{3212} = -L^{2321} = L^{3221} = 4\pi G_2^m$$
$$L^{3112} = -L^{1231} = -L^{1312} = -L^{3121} = L^{1321} = -4\pi G_1^m$$

[1] И г. Т а м м. Ж. Р. Ф.-Х. О., т. LVI, стр. 248, 1924 г. Это определение тензоров $Sikem$ и $Tikem$ отличается тем, что учитывается антисимметрия в первых и последних двух значках, которая не учтена в цитируемой работе. Кроме этого, я увязываю здесь изложение с „покоящейся" координатной системой K только ради наглядности. Ниже, с введением для тензора $Sikem$ соотношения в инвариантной форме, явно выражающего $Sikem$ через четырехмерные тензоры 2-го ранга $\varepsilon_{ik}(\nu)$ и $\mu_{ik}^{-1}(\nu)$, я от этой зависимости совершенно избавляюсь.

ЭР01663

$$N_{1414}=N_{4141}=-N_{1441}=-N_{4114}=-\frac{1}{\Delta^{\vartheta}}\left(\varepsilon_2\varepsilon_3-16\pi^2G_1^{\vartheta^2}\right)$$

$$N_{2424}=N_{4242}=-N_{2442}=-N_{4224}=-\frac{1}{\Delta^{\vartheta}}\left(\varepsilon_1\varepsilon_3-16\pi^2G_2^{\vartheta^2}\right)$$

$$N_{3434}=N_{4343}=-N_{3443}=-N_{4334}=-\frac{1}{\Delta^{\vartheta}}\left(\varepsilon_1\varepsilon_2-16\pi^2G_3^{\vartheta^2}\right)$$

$$N_{2323}=N_{3232}=-N_{2332}=-N_{3223}=\frac{1}{\Delta^{m}}\left(\frac{1}{\mu_2}\frac{1}{\mu_3}-16\pi^2G_1^{m^2}\right)$$

$$N_{3131}=N_{1313}=-N_{3113}=-N_{1331}=\frac{1}{\Delta^{m}}\left(\frac{1}{\mu_1}\frac{1}{\mu_3}-16\pi^2G_2^{m^2}\right)$$

$$N_{1212}=N_{2121}=-N_{1221}=-N_{2112}=\frac{1}{\Delta^{m}}\left(\frac{1}{\mu_1}\frac{1}{\mu_2}-16\pi^2G_3^{m^2}\right)$$

$$N_{1424}=N_{2414}=-N_{1442}=-N_{4124}=N_{4142}=\frac{1}{\Delta^{\vartheta}}16\pi^2G_1^{\vartheta}G_2^{\vartheta}$$

$$N_{1434}=N_{3414}=-N_{1443}=-N_{4134}=N_{4143}=\frac{1}{\Delta^{\vartheta}}16\pi^2G_1^{\vartheta}G_3^{\vartheta}$$

$$N_{2434}=N_{3424}=-N_{2443}=-N_{4234}=N_{4243}=\frac{1}{\Delta^{\vartheta}}16\pi^2G_2^{\vartheta}G_3^{\vartheta}$$

$$N_{2331}=N_{3123}=-N_{2313}=-N_{3231}=N_{3213}=-\frac{1}{\Delta^{m}}16\pi^2G_1^{m}G_2^{m}\qquad(1,\ 5).$$

$$N_{2312}=N_{1223}=-N_{2321}=-N_{3212}=N_{3221}=-\frac{1}{\Delta^{m}}16\pi^2G_1^{m}G_3^{m}$$

$$N_{3112}=N_{1231}=-N_{3121}=-N_{1312}=N_{1321}=-\frac{1}{\Delta^{m}}16\pi^2G_2^{m}G_3^{m}$$

$$K_{1424}=-K_{2414}=-K_{4124}=-K_{1442}=K_{4142}=\frac{1}{\Delta^{\vartheta}}4\pi\varepsilon_3G_3^{\vartheta}$$

$$K_{1434}=-K_{3414}=-K_{4134}=-K_{1443}=K_{4143}=-\frac{1}{\Delta^{\vartheta}}4\pi\varepsilon_2G_2^{\vartheta}$$

$$K_{3424}=-K_{2434}=-K_{4324}=-K_{3442}=K_{4342}=-\frac{1}{\Delta^{\vartheta}}4\pi\varepsilon_1G_1^{\vartheta}$$

$$K_{2331}=-K_{3123}=-K_{2313}=-K_{3231}=K_{3213}=\frac{1}{\Delta^{m}}4\pi\frac{1}{\mu_3}G_3^{m}$$

$$K_{2312}=-K_{1223}=-K_{2321}=-K_{3212}=K_{3221}=-\frac{1}{\Delta^{m}}4\pi\frac{1}{\mu_2}G_2^{m}$$

$$K_{3112}=-K_{1231}=-K_{3121}=-K_{1312}=K_{1321}=\frac{1}{\Delta^{m}}4\pi\frac{1}{\mu_1}G_1^{m}$$

где $$\Delta^{\vartheta}=\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3-16\pi^2\varepsilon_1G_1^{\vartheta^2}-16\pi^2\varepsilon_2G_2^{\vartheta^2}-16\pi^2\varepsilon_3G_3^{\vartheta^2}$$

и $$\Delta^{m}=\frac{1}{\mu_1}\frac{1}{\mu_2}\frac{1}{\mu_3}-16\pi^2\frac{1}{\mu_1}G_1^{m^2}-16\pi^2\frac{1}{\mu_2}G_2^{m^2}-16\pi^2\frac{1}{\mu_3}G_3^{m^2}$$

Все остальные компоненты, в рассматриваемой координатной системе K^0, равняются нулю.

ДВГНБ

ЭР01663

§ 2.

При переходе от координатной системы K к движущейся системе K' уравнения (1, 1) и (1, 2), согласно принципу относительности, должны оставаться формально неизменными, т. е. если

$$f^{ik} = \frac{1}{2} S^{ik\alpha\beta} F_{\alpha\beta}, \quad F_{ik} = \frac{1}{2} T_{ik\alpha\beta} f^{\alpha\beta}$$

есть выражение соотношений электродинамики в координатной системе K, то в движущейся относительно K координатной системе K' будем иметь:

$$f'^{ik} = \frac{1}{2} S'^{ik\alpha\beta} F'_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (M'^{ik\alpha\beta} + iL'^{ik\alpha\beta}) F_{\alpha\beta} \qquad (2, 1),$$

$$F_{ik} = \frac{1}{2} T'_{ik\alpha\beta} f'^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (N'_{ik\alpha\beta} + iK'_{ik\alpha\beta}) f'^{\alpha\beta} \qquad (2, 2).$$

Последние, если вместо $M'^{ik\alpha\beta} + iL'^{ik\alpha\beta}$ и $N'_{ik\alpha\beta} + iK'_{ik\alpha\beta}$ подставить их значения через составляющие в координатной системе K, запишутся:

$$f^{ik} = \frac{1}{2} (M^{\lambda\mu\gamma\delta} + iL^{\lambda\mu\gamma\delta}) \alpha^i_\lambda \alpha^k_\mu \alpha^\alpha_\gamma \alpha^\beta_\delta F'_{\alpha\beta} \qquad (2\ 3),$$

$$F'_{ik} = \frac{1}{2} (N_{\lambda\mu\gamma\delta} + iK_{\lambda\mu\gamma\delta}) \alpha^\lambda_i \alpha^\mu_k \alpha^\gamma_\alpha \alpha^\delta_\beta f'^{\alpha\beta} \qquad (2, 4).$$

Положим далее, что движущая система K' связана с K^0 преобразованием Лоренца, переводящим x_1, x_4 в x'_1, x'_4 и не меняющим x_2 x_3, т. е.

$$\frac{\partial x'_i}{\partial x_k} = \left(\alpha^i_k\right)' = \begin{vmatrix} \varkappa & 0 & 0 & -\beta\varkappa \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\varkappa & 0 & 0 & \varkappa \end{vmatrix}; \quad \frac{\partial x_i}{\partial x'_k} = \left(\alpha^i_k\right)_{,} = \begin{vmatrix} \varkappa & 0 & 0 & \beta\varkappa \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\varkappa & 0 & 0 & \varkappa \end{vmatrix} \qquad (2, 5),$$

где $\varkappa = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $\beta = \dfrac{v'}{c}$, v' — скорость K' относительно K^0 и направление скорости совпадает с осью x.

Тогда от соотношений (2, 3), если выполнить вычисления, легко перейти к уравнениям

$$Y'_\alpha f'^{\alpha e} = A'^{ek} Y'^m F'_{mk}; \quad Y'^\alpha f'^*_{\alpha e} = C'_{ek} Y'_m F'^{*km} \qquad (2, 6),^1$$

где

$$(A'^{ek}) = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 \varkappa^2 & i4\pi G^3_3 \varkappa & -i4\pi G^3_2 \varkappa & \varepsilon_1 \dfrac{v}{c} \varkappa^2 \\ -i4\pi G^3_3 \varkappa & \varepsilon_2 & i4\pi G^3_1 & -i4\pi G^3_3 \dfrac{v}{c} \varkappa \\ i4\pi G^3_2 \varkappa & -i4\pi G^3_1 & \varepsilon_3 & i4\pi G^3_2 \dfrac{v}{c} \varkappa \\ \varepsilon_1 \dfrac{v}{c} \varkappa^2 & i4\pi G^3_3 \dfrac{v}{c} \varkappa & -i4\pi G^3_2 \dfrac{v}{c} \varkappa & \varepsilon_1 \left(\dfrac{v}{c}\right)^2 \varkappa^2 \end{vmatrix};$$

1 f^{*ik}, F^{*ik} — дуальные тензоры к f^{ik} и F_{ik}.

ЭР01663

ДВГНБ

$$(C'_{ek})=\begin{vmatrix} \frac{1}{\mu_1}\varkappa^2 & -i4\pi G_3^m & i4\pi G_2^m\varkappa & -\frac{1}{\mu_1}\frac{v}{c}\varkappa^2 \\ i4\pi G_3^m\varkappa & \frac{1}{\mu_2} & -i4\pi G_1^m & -i4\pi G_3^m\frac{v}{c}\varkappa \\ -i4\pi G_2^m\varkappa & i4\pi G_1^m & \frac{1}{\mu_3} & i4\pi G_2^m\frac{v}{c}\varkappa \\ -\frac{1}{\mu_1}\frac{v}{c}\varkappa^2 & i4\pi G_3^m\frac{v}{c}\varkappa & -i4\pi G_2^m\frac{v}{c}\varkappa & \frac{1}{\mu_1}\left(\frac{v}{c}\right)^2\varkappa^2 \end{vmatrix} \quad (2,\ 7)$$

Y'—четырехмерный вектор скорости с компонентами в системе K'

$$Y_1'=Y'^1=\frac{v_x}{c}\varkappa;\ Y_2'=Y'^2=Y_3'=Y'^3=0;\ Y_4'=-\varkappa;\ Y'^4=\varkappa \quad (2,\ 8).$$

При переходе к частному случаю—к анизотропной среде (в этом случае, очевидно, достаточно положить равными нулю $\vec{G}^3$ и $\vec{G}^m$) — полученные формулы сводятся к тензориальным соотношениям, по внешнему виду вполне аналогичным уравнениям Минковского.[1]

$$Y'_\alpha f'^{\alpha e}=A^{ek}Y'_m F'_{mk}$$
$$Y'^\alpha f'^*_{\alpha e}=C_{ek}Y'_m F'^{*km} \quad (2,\ 9).$$

Поэтому уравнения (2, 6) следует рассматривать как обобщенное аналитическое выражение макроскопических соотношений между векторами $\vec{D}$, $\vec{H}$ и $\vec{E}$, $\vec{B}$ в форме Минковского для анизотропно-гиротропной среды.

Совершенно аналогично выводятся соотношения:

$$Y'^\alpha F'_{\alpha e}=U'_{ek}Y'_m f'^{mk}$$
$$Y'_\alpha F'^*_{\alpha e}=V'_{ek}Y'_m f'^*_{km} \quad (2,\ 10).$$

Все окончательные формулы имеют инвариантную форму по отношению к точечному преобразованию общей теории относительности. Поэтому следует предполагать, что соотношения (2, 6) и (2, 10) остаются в силе и в общей теории относительности.

§ 3.

Решению задачи в предыдущем параграфе предшествовало установление тензориальной зависимости между основными векторами электромагнитного поля, в которых материальные константы истолковывались как компоненты тензора 4-го ранга. Пользуясь этой зависимостью, мы получили инвариантные уравнения (2, 6) и (2, 10). Однако, мы пользовались координатной системой K^0, покоящейся относительно тела, для того, чтобы в этой системе связать составляющие тензора s^{ikem} и обычные коэффициенты: ε_{ii} (главные значения диэлектрической постоянной), μ_{ii}^{-1} (главные значения магнитной проницаемости) и $\vec{G}^3$, $\vec{G}^m$ (электрический и магнитный векторы гирации).

Теперь я ставлю задачу в общей форме, не пользуясь какой бы то ни было специальной системой координат, инвариантно выразить

[1] H. Minkowski. Eine Ableitung der Grundgleichungen für die Elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern vom Handpunkt der Elektronentheorie. Wiss. in Monographien, Heft 1. Leipzig. B. G. Teubner. 1910.

ЭР01663

явно тензор 4-го ранга s^{ikem} через два (четырехмерные) тензора ε_{ik} и μ_{ik}^{-1}, определяющие собою одновременно диэлектрическую постоянную и электрическую гирацию, магнитную проницаемость и магнитную гирацию среды, соответственно. Этим самым мы полностью исправляем недостаток инвариантности, допущенный нами в предыдущем параграфе.

Покажем, что эту задачу можно разрешить, если положить

$$S^{ikem} = a^{im}Y^e Y^k + a^{ek}Y^i Y^m - a^{ik}Y^e Y^m - a^{em}Y^i Y^k + l^{ie\alpha\sigma}l^{km\beta\tau}Y_\sigma Y_\tau b_{\alpha\beta} \quad (3, 1)$$

и для обратного тензора

$$T_{ikem} = c_{im}Y_e Y_k + c_{ek}Y_i Y_m - c_{ik}Y_e Y_m - c_{em}Y_i Y_k + l_{ie\alpha\sigma}l_{km\beta\tau}Y^\sigma Y^\tau d^{\alpha\beta} \quad (3, 2),$$

где a, b, c и d — определенные материальные четырехмерные 2-го ранга тензоры, Y — четырехмерный вектор скорости и l_{ikem} — единичный антисимметричный тензор *Levi-Civita*.

Заметим, соотношения (3, 1) и (3, 2) выбраны нами таким образом, чтобы удовлетворить свойствам симметрии (антисимметрии) тензора S^{iekm} относительно перестановок первых и последних двух индексов. Что касается остальных свойств симметрии, то они, как было показано, определяются свойствами среды. Для анизотропно-гиротропной среды, чтобы удовлетворить свойствам симметрии (1, 3), достаточно положить, что тензоры a, b, c и d удовлетворяют Hermite'вым свойствам симметрии.

Если ввести теперь матрицы

$$(a^{ik}) = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & i4\pi G_3^3 & -i4\pi G_2^3 & a^{14} \\ -i4\pi G_3^2 & \varepsilon_2 & i4\pi G & a^{24} \\ i4\pi G_2^3 & -i4\pi G_1^3 & \varepsilon_3 & a^{34} \\ a^{41} & a^{42} & a^{43} & a^{44} \end{vmatrix};$$

$$(b_{ik}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\mu_1} & -i4\pi G_2^m & i4\pi G_2^m & b_{14} \\ i4\pi G_3^m & \frac{1}{\mu_2} & -i4\pi G_1^m & b_{24} \\ -i4\pi G_2^m & i4\pi G_1^m & \frac{1}{\mu_3} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix} \quad (3, 3)$$

и принять элементы этих матриц за составляющие тензоров a^{ik} и b_{ik} в системе K^0, то в „покоящейся" и главной координатной системе K^0 (в чем легко убедиться) значения компонент тензора S^{iekm} будут определяться величинами прежней таблицы (1, 5). При этом значение компонент a^{i4}, a^{4i} и b_{i4}, b_{4i} остаются совершенно произвольными.

Покажем, как это было упомянуто выше, что с помощью тензориальной зависимости (3, 1) можно, в самом общем случае, для любой координатной системы сразу получить инвариантные уравнения

$$Y_\alpha f^{\alpha e} = A^{ek}Y^m F_{mk}, \quad Y_\alpha f^{*\alpha e} = C_{ek}Y_m F^{*mk} \quad (3, 4)$$

и соотношения (3, 2)

$$Y_\alpha F_{\alpha e} = U_{ek}Y_m f^{mk}, \quad Y_\alpha F^{*\alpha e} = V^{ek}Y^m f^*_{km} \quad (3, 5).$$

ЭР01663

ДВГНБ

С этой целью введем, как и прежде, линейные тензориальные соотношения

$$f^{ie} = \frac{1}{2}\left[a^{im}Y^e\,Y^\kappa + a^{e\kappa}Y^i\,Y^m - a^{i\kappa}Y^e\,Y^m - a^{em}Y^i\,Y^\kappa + \right.$$
$$\left. + l^{ie\alpha\sigma}l^{\kappa m\beta\tau}Y_\sigma Y_\tau b_{\alpha\beta}\right]F^{\kappa m} \qquad (3,\ 6)$$

или в разрешенной форме относительно F_{ie}

$$F_{ie} = \frac{1}{2}\left[c_{im}Y_e\,Y^\kappa + c_{e\kappa}Y_i\,Y_m - c_{i\kappa}Y_e\,Y_m - c_{em}Y_i\,Y_\kappa + l_{ie\alpha\sigma}l_{\kappa m\beta\tau}Y^\sigma\,Y^\tau\,d^{\alpha\beta}\right]f^{\kappa m} \quad (3,\ 7)$$

Образовав скалярное произведение от обеих частей равенства (3, 6) с четырехмерным вектором скорости y, получим:

$$\overline{Y}_i f^{ie} = \frac{1}{2}\left[(a^{im}Y^e\,Y^\kappa + a^{e\kappa}Y^i\,Y^m - a^{i\kappa}Y^e\,Y^m - a^{em}Y^i\,Y^\kappa)Y_i + \right.$$
$$\left. + l^{ie\alpha\sigma}l^{\kappa m\beta\tau}Y_\sigma\,Y_\tau\,Y_i\right]F_{\kappa m}$$

Легко видеть, что это равенство упрощается. Из свойств симметрии тензора Levi-Civita выражение

$$l^{ie\alpha\sigma}l^{\kappa m\beta\tau}Y_\sigma\,Y_\tau\,Y_i\,b_{\alpha\beta} \equiv 0.$$

Абсолютное значение четырехмерного вектора скорости, как известно, определяется соотношением

$$Y^2 = -1.$$

Следовательно,

$$Y_i f^{ie} = \frac{1}{2}(a^{i\kappa}Y^e\,Y^m Y_i - a^{em}Y^\kappa - a^{im}Y^e\,Y^\kappa\,Y_i + a^{e\kappa}Y^m)F_{m\kappa} =$$
$$= (a^{e\kappa}Y^m + a^{i\kappa}Y^e\,Y^m Y_i)F_{m\kappa} = (a^{e\kappa} + a^{i\kappa}Y^e\,Y_i)Y^m F_{m\kappa}.$$

Добавляя равное нулю слагаемое

$$(a^{ei}Y^\kappa\,Y_i + a^{i\alpha}Y^e\,Y^\kappa\,Y_\alpha Y_i)Y^m F_{m\kappa}$$

и обозначая через $A^{e\kappa}$

$$A^{e\kappa} = a^{e\kappa} + a^{i\kappa}Y^e\,Y_i + a^{ei}Y^\kappa\,Y_i + a^{i\alpha}Y^e\,Y^\kappa\,Y_\alpha\,Y_i \qquad (3,\ 8),$$

получим

$$Y_i f^{ie} = A^{e\kappa}Y^m F_{m\kappa}.$$

Найденная система уравнений тождественно совпадает с первым из искомых уравнений (3, 4).

Если образовать теперь скалярное произведение от обеих частей равенства (3, 6) с произведением $Y\gamma\, l_{\gamma\delta ie}$, составленного из четырехмерного вектора скорости и тензора Levi-Civita, а именно

$$Y\gamma\, l_{\gamma\delta ie}f^{ie} = \frac{1}{2}\left[(a^{im}Y^e\,Y^\kappa + a^{e\kappa}Y^i\,Y^m - a^{i\kappa}Y^e\,Y^m - a^{em}Y^i\,Y^\kappa)Y\gamma\, l_{\gamma\delta ie} + \right.$$
$$\left. + l_{\gamma\delta ie}l^{ie\alpha\sigma}l^{\kappa m\beta\tau}Y_\sigma Y_\tau\,Y\gamma\, b_{\alpha\beta}\right]F_{\kappa m},$$

то, как и в первом случае, можно показать, что оно преобразуется к формуле

$$Y^\alpha f^*_{\alpha e} = C_{e\kappa}Y_m F^{*\kappa m},$$

где

$$C_{e\kappa} = b_{e\kappa} + b_{i\kappa}Y_e\,Y^i + b_{ei}Y_\kappa\,Y^i + b_{i\alpha}Y_\kappa\,Y_e\,Y^i\,Y^\alpha \qquad (3,\ 9).$$

В самом деле, на основании свойств симметрии тензора Levi-Civita

$$(a^{im}Y^e\,Y^\kappa + a^{e\kappa}Y^i\,Y^m - a^{i\kappa}Y^e\,Y^m - a^{em}Y^i\,Y^\kappa)Y\gamma\, l_{\gamma\delta ie} = 0$$

и

$$\frac{1}{2}\,l_{\gamma\delta ie}l^{ie\alpha\sigma} = \frac{1}{2}\,l_{\gamma\delta ie}l^{\alpha\sigma ie} = \delta^\alpha_\gamma\,\delta^\sigma_\delta - \delta^\alpha_\delta\,\delta^\sigma_\gamma.$$

ЭР01663

ДВГТУ

В силу этого

$$Y^i l_{\gamma\delta ie} f^{ie} = (b_{\delta\beta} + b_{\gamma\beta} Y_\delta Y^\gamma) Y_\tau l^{\kappa m\beta\tau} F_{\kappa m}$$

или, если произвести соответствующую замену индексов,

$$Y^\alpha l_{\alpha e\delta\gamma} f^{\delta\gamma} = (b_{e\kappa} + b_{i\kappa} Y_e Y^i) Y_m l^{\kappa m\beta\tau} F_{\beta\tau}.$$

Пользуясь определением дуального тензора и добавляя равное нулю слагаемое

$$(b_{ei} Y_\kappa Y^i + b_{i\alpha} Y_e Y_\kappa Y^i Y^\alpha) Y_m l^{\kappa m\beta\tau},$$

находим

$$Y^\alpha f^*_{\alpha e} = C_{e\kappa} Y_m F^{*\kappa m}.$$

$C_{e\kappa}$ в точности совпадает с выражением, определенным формулой (3, 9).

Все рассуждения, которые мы только что развили, могут быть полностью применимы и к линейной тензориальной зависимости (3, 7). Поэтому мы ограничимся лишь указанием обратной группы инвариантных уравнений (3, 5), приведенных нами выше. Кроме этого, все эти рассуждения имеют инвариантный характер, а поэтому они должны иметь силу в любой координатной системе.

Покажем теперь, что результаты (§ 2) могут быть получены из рассмотрения тензориальных соотношений (3, 1) и (3, 2), если последние связывать с координатной системой K^0. Действительно, для системы K^0 из (3, 8) и (3, 9) следует

$$\left.\begin{aligned} &A^{e\kappa} = a^{e\kappa};\ C_{e\kappa} = b_{e\kappa} \\ &A^{e4} = A^{4\kappa} = A^{44} = C_{e4} = C_{4\kappa} = C_{44} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (ek = 1, 2, 3)$$

или, на основании (3, 3)

$$(A^{e\kappa}) = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & i4\pi G_3^3 & -i4\pi G_2^3 & 0 \\ -i4\pi G_3^3 & \varepsilon_2 & i4\pi G_1^3 & 0 \\ i4\pi G_2^3 & -i4\pi G_1^3 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

$$(C_{e\kappa}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\mu_1} & -i4\pi G_3^m & i4\pi G_2^m & 0 \\ i4\pi G_3^m & \frac{1}{\mu_2} & -i4\pi G_1^m & 0 \\ -i4\pi G_2^m & i4\pi G_1^m & \frac{1}{\mu_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad (3,\ 10).$$

Отсюда, пользуясь преобразованием Лоренца (2, 5), находим, что в любой системе K' — $A'^{e\kappa}$ и $C'_{e\kappa}$ совпадают с матрицами (2, 7). Это все дает нам право рассматривать четырехмерные тензоры $A^{e\kappa}$ и $C_{e\kappa}$, введенные инвариантно в (3, 8) и (3, 9), как четырехмерные тензоры 2-го ранга (комплексных материальных констант — диэлектрической постоянной и магнитной проницаемости).

При переходе к пустоте достаточно положить в наших общих формулах (3, 1) и (3, 2) $a^{i\kappa} = g^{i\kappa}$ и $b^{i\kappa} = g^{i\kappa}$.

ЭР01663

§ 4.

Чтобы сделать предыдущие выводы физически более наглядными, остановимся на разборе некоторых частных случаев.

I пример.

Магнитное вращение плоскости поляризации.

Действие магнитного поля, проявляющееся по вращении плоскости поляризации световых волн, эквивалентно рассмотрению электрических гирационных явлений, обусловленных действием сильного постоянного магнитного поля $\vec{H}^0$. В случае Faradyeffekt'a величина электрического вектора гирации, отнесенного к единице объема, в первом приближении равна[1]

$$\vec{G}^э = \frac{\omega e^2 N}{c \cdot m^2(\omega_0{}^2 - \omega^2)^2}\vec{H}^0 = \sigma\vec{H}^0 \qquad (4,\ 1),$$

где e—заряд и m—масса электрона, ω_0—частота собственных колебаний и ω—частота вынужденных колебаний системы, N—число частиц в единице объема, c—скорость света и, наконец,

$$\sigma = \frac{\omega e^2 N}{c \cdot m^2(\omega_0{}^2 - \omega^2)^2}$$

Что касается направления вектора гирации $\vec{G}^э$, то оно не зависит от направления распространения света.

Полагая вектор магнитной гирации $\vec{G}^m = 0$, получим для векторов электромагнитного поля следующие соотношения в системе K^0

$$\begin{aligned} D_1 &= \varepsilon_1 E_1 + i4\pi\sigma[\vec{E}\cdot\vec{H}^0]_1; \quad H_1 = \frac{1}{\mu_1}B_1 \\ D_2 &= \varepsilon_2 E_2 + i4\pi\sigma[\vec{E}\cdot\vec{H}^0]_2; \quad H_2 = \frac{1}{\mu_2}B_2 \\ D_3 &= \varepsilon_3 E_3 + i4\pi\sigma[\vec{E}\cdot\vec{H}^0]_3; \quad H_3 = \frac{1}{\mu_3}B_3 \end{aligned} \qquad (4,\ 2)$$

или (см. § 2 или § 3)

$$Y_\alpha f^{\alpha e} = A^{e\kappa}Y^m F_{m\kappa}; \quad Y_\alpha f^{*}{}_{\alpha e} = C_{e\kappa}Y_m F^{*\kappa m} \qquad (4,\ 3),$$

где

$$(A^{e\kappa}) = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & i4\pi\sigma H_3^0 & -i4\pi\sigma H_2^0 & 0 \\ -i4\pi\sigma H_3^0 & \varepsilon_2 & i4\pi\sigma H_1^0 & 0 \\ i4\pi\sigma H_2^0 & -i4\pi\sigma H_1^0 & \varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad (C_{e\kappa}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\mu_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mu_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad (4,4).$$

Если система K^0 приводится к системе K^1 лоренцовским преобразованием, то в пространстве K^1 будем иметь

$$Y'_\alpha f'^{\alpha e} = A'^{e\kappa}Y'^m F'_{m\kappa}; \quad Y'^\alpha f'^{*}{}_{\alpha e} = C'_{e\kappa}Y'_m F'^{*\kappa m} \qquad (4,\ 5),$$

[1] См., например, Я. И. Френкель. Электродинамика, т. II, 1935 г., стр. 160.

ЭР01663

ДВГНБ

где A'_{ek} и C'_{ek} равны элементам нижеуказанных квадратичных матриц

$$(A'_{ek}) = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 \varkappa^2 & i4\pi\sigma H_3^0 \varkappa & -i4\pi\sigma H_2^0 \varkappa & \varepsilon_1 \frac{v}{c} \varkappa^2 \\ -i4\pi\sigma H_3^0 \varkappa & \varepsilon_2 & i4\pi\sigma H_1^0 & -i4\pi\sigma H_3^0 \frac{v}{c} \varkappa \\ i4\pi\sigma H_2^0 \varkappa & -i4\pi\sigma H_1^0 & \varepsilon_3 & i4\pi\sigma H_2^0 \frac{v}{c} \varkappa \\ \varepsilon_1 \frac{v}{c} \varkappa^2 & i4\pi\sigma H_3^0 \frac{v}{c} \varkappa & -i4\pi\sigma H_2^0 \frac{v}{c} \varkappa & \varepsilon_1 \left(\frac{v}{c}\right)^2 \varkappa^2 \end{vmatrix};$$

$$(C'_{ek}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\mu_1} \varkappa^2 & 0 & 0 & -\frac{1}{\mu_1} \frac{v}{c} \varkappa^2 \\ 0 & \frac{1}{\mu_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mu_3} & 0 \\ -\frac{1}{\mu_1} \frac{v}{c} \varkappa^2 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_1} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \varkappa^2 \end{vmatrix} \qquad (4,6).$$

II пример.

Оптическая активность (естественное вращение плоскости поляризации).

Световое поле линейно-поляризованного света, длина волны λ которого сравнима с диаметром a молекул (или размерами кристаллической решетки), становится в рассматриваемой среде пространственно-неоднородным. Вследствие этого линейно-поляризованный свет испытывает в направлении распространения естественное вращение плоскости поляризации. Это явление носит название „оптической активности". Между естественным вращением плоскости поляризации и магнитным имеется существенное отличие: вектор гирации, характеризующий магнитное вращение плоскости поляризации, неподвижен, не зависит от направления распространения света, тогда как вектор активности всегда остается параллельным нормали к волновой поверхности.

Для изотропных и оптически активных сред соотношения электродинамики, связывающие между собой значения основных векторов усредненного электромагнитного поля, имеют следующий вид[1]

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} + i\alpha \left[\vec{n} \cdot \vec{E}\right]$$
$$\vec{H} = \vec{B} + \frac{i}{n_0} \alpha \vec{E} \qquad (4,7).$$

В первом приближении, т. е. если не учитывать взаимодействие атомов (или пространственную неоднородность) и магнитные эффекты,

$$\vec{E} = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} \left[\vec{n} \cdot \vec{B}\right].$$

[1] Max. Born. Optik. Ein Lehrbuch der Elektromagnetischen Lichttheorie. Berlin. Verlag von Julius Springer. 1933.

ЭР01663

Тогда $$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}+i\alpha\left[\vec{n}\cdot\vec{E}\right]$$

$$\vec{H}=\vec{B}-\frac{i}{n_0\sqrt{\varepsilon}}\alpha\left[\vec{n}\cdot\vec{B}\right]=\vec{B}+i\sigma\left[\vec{n}\cdot\vec{B}\right] \qquad (4,\ 8),$$

где $\alpha=\frac{4\pi\cdot N}{3}(\varepsilon+2)G$, $\sigma=-\frac{\alpha}{n_0\sqrt{\varepsilon}}$, G — так называемая гирационная усредненная постоянная, n_0 — показатель преломления изотропной оптически активной среды.

Введем теперь Hermite'вски симметричные тензоры

$$\varepsilon_{ik}=\beta_{ik}+i\gamma_{ik} \text{ и } \mu^{-1}_{ik}=\eta_{ik}+i\xi_{ik}$$

и определим их в системе K^0, соответственно, матрицами

$$(\beta_{ik}+i\gamma_{ik})=\begin{vmatrix}\varepsilon_1 & -in_3\alpha & in_2\alpha\\ in_3\alpha & \varepsilon & -in_1\alpha\\ -in_2\alpha & in_1\alpha & \varepsilon\end{vmatrix};\ (\eta_{ik}+i\xi_{ik})=\begin{vmatrix}1 & -in_3\sigma & in_2\sigma\\ in_3\sigma & 1 & -in_1\sigma\\ -in_2\sigma & in_1\sigma & 1\end{vmatrix}(ik=1,2,3)$$

В этих обозначениях соотношения (4, 8) примут следующий вид

$$D_i=\beta_{ik}E_k+i\gamma_{ik}E_k,\quad H_i=\eta_{ik}B_k+i\xi_{ik}B_k \qquad (4,\ 9).$$

Определяя, исходя из предыдущего, формулами

$$\gamma_{ik}=l_{ike}G^s_e,\quad \xi_{ik}=l_{kie}G^m_e \qquad (4,10)$$

векторы электрической и магнитной гирациии, получим

$$D_i=\beta_{ik}E_k+il_{ike}G^s_eE_k,\quad H_i=\eta_{ik}B_k+il_{kie}G^m_eB_k \qquad (4,\ 11).$$

В системе K^0 эти уравнения (см. § 2 и § 3) запишутся

$$Y_\alpha f^{\alpha e}=A^{ek}Y^mF_{mk};\quad Y_\alpha f^{*\alpha e}=C_{ek}Y_mF^{*km},$$

где

$$(A^{ek})=\begin{vmatrix}\varepsilon & -in_3\alpha & in_2\alpha & 0\\ in_3\alpha & \varepsilon & -in_1\alpha & 0\\ -in_2\alpha & in_1\alpha & \varepsilon & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix};\quad (C_{ek})=\begin{vmatrix}1 & -in_3\sigma & in_2\sigma & 0\\ in_3\sigma & 1 & -in_1\sigma & 0\\ -in_2\sigma & in_1\sigma & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix} \qquad (4,\ 12).$$

В координатной системе K' мы требуем выполнения соответственных преобразованных соотношений, т. е.

$$Y'_\alpha f'^{\alpha e}=A'^{ek}Y'^mF'_{mk},\quad Y'^\alpha f'^{*}_{\alpha e}=C'_{ek}Y'_mF'^{*km} \qquad (4,\ 13).$$

§ 5.

Уравнения сохранения для анизотропно-гиротропной среды.

Условимся плотность электромагнитной энергии, локализированной в единице объема, обозначать через W. При определении ее величины мы будем исходить из следующих положений: 1) полагаем, что вещественность плотности энергии должна сохраняться в любой среде, независимо от возможной комплексности электромагнитного поля в последней, 2) искомая зависимость для плотности энергии должна иметь квадратичную форму, сводящуюся в случае анизотропии (или изотропии) к форме, принятой в максвелловской электродинамике.

ЭР01663

РЕПОЗИТОРИЙ ГГТУ

Рассмотрим квадратичную форму[1]

$$W=\frac{1}{8\pi}\left(\varepsilon_{i\kappa}E_i\,\overline{E}_\kappa+\mu^{-1}_{i\kappa}B_i\,\overline{B}_\kappa\right) \qquad (5,\ 1)$$

и определим ею плотность электромагнитной энергии. Согласно теории квадратичных форм, величина, определяемая равенством (5, 1), будет всегда вещественной при любых комплексных значениях векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$, если $\varepsilon_{i\kappa}$ и $\mu^{-1}_{i\kappa}$ удовлетворяют Hermite'вским условиям симметрии.

Таким образом, очевидно, если положить, что

$$\varepsilon_{i\kappa}=\overline{\varepsilon}_{\kappa i} \text{ и } \mu^{-1}_{i\kappa}=\overline{\mu}^{-1}_{\kappa i},$$

то принятая квадратичная форма (5, 1) будет полностью удовлетворять требованиям, формулированным выше.

Требования, положенные в основу определения плотности электромагнитной энергии, мы переносим и на другие величины, имеющие механический смысл (вектор Пойтинга, электромагнитные натяжения, пондеромоторная сила и т. д.). Мы полагаем, что величины (так же, как и плотность энергии), во-первых, должны быть вещественными и, во-вторых, в частном случае должны сводиться к обычным квадратичным выражениям и давать правильную известную зависимость между пондеромоторной силой и работой, электромагнитным количеством движения и энергией и т. д., имеющую место в классической электродинамике.

Итак, возьмем уравнение электромагнитного поля для среды физически-неоднородной, анизотропной и гиротропной

$$\begin{aligned} &\nabla_{[i}F_{\kappa e]}=0, \quad f^{i\kappa}=\frac{1}{2}S^{i\kappa\alpha\beta}F_{\alpha\beta} \\ &\nabla_\alpha f^{\kappa\alpha}=r^\kappa, \quad F_{i\kappa}=\frac{1}{2}T_{i\kappa\alpha\beta}f^{\alpha\beta} \end{aligned} \qquad (5,\ 2)$$

и уравнения комплексно сопряженные им

$$\begin{aligned} &\nabla_{[i}\overline{F}_{\kappa e]}=0 \quad \overline{f}^{i\kappa}=\frac{1}{2}\overline{S}^{i\kappa\alpha\beta}\overline{F}_{\alpha\beta} \\ &\nabla_\alpha \overline{f}^{\kappa\alpha}=\overline{r}^\kappa \quad \overline{F}_{i\kappa}=\frac{1}{2}\overline{T}_{i\kappa\alpha\beta}\overline{f}^{\alpha\beta} \end{aligned} \qquad (5,\ 3).$$

Уравнением

$$4\pi f_i=\frac{1}{2}\left(r^\kappa\overline{F}_{i\kappa}+\overline{r}^\kappa F_{i\kappa}\right)+\frac{1}{16}\left(\overline{F}_{\kappa\alpha}F_{\beta\gamma}\nabla_i S^{\kappa\alpha\beta\gamma}+F_{\kappa\alpha}\overline{F}_{\beta\gamma}\nabla_i\overline{S}^{\kappa\alpha\beta\gamma}\right) \qquad (5,\ 4)$$

определим усредненные механические величины — силу и работу электромагнитного поля. В рассматриваемом случае сила слагается из двух частей:

$$f'_i=\frac{1}{8\pi}\left(r^\kappa\overline{F}_{i\kappa}+\overline{r}^\kappa F_{i\kappa}\right), \quad (i=1,\ 2,\ 3) \qquad (5,\ 5)$$

---

[1] 1. Я. И. Френкель. Электродинамика, т. II, 1935 г.
2. Max. Born. Optik. Ein Lehrbuch der Elektromagnetischen Lichttheorie. Berlin. Verlag von Julius Springer. 1933.

ЭР01663

действующей на свободные электрические заряды и силы

$$f''_i = \frac{1}{64\pi}(\overline{F}_{\kappa\alpha}F_{\beta\gamma}\nabla_i S^{\kappa\alpha\beta\gamma} + F_{\kappa\alpha}\overline{F}_{\beta\gamma}\nabla_i \overline{S}^{\kappa\alpha\beta\gamma}) \qquad (5,\ 6),$$

действующей на поляризованный диэлектрик и магнетик. Легко также показать, что сила, определяемая формулой (5, 6), совпадает с обычной силой, действующей на изотропный и неоднородный диэлектрик, а именно:

$$\overline{f}'' = \sum_{i=1}^{3} f''_i = -\frac{1}{8\pi}E^2\nabla\varepsilon + \frac{1}{8\pi}B^2\nabla\mu^{-1}\ ^1$$

Формула (5, 4) представляет собою одно из основных положений электродинамики, позволяющее сформулировать в самом общем виде закон сохранения энергии и количества движения. Для доказательства последнего утверждения поступаем так: заменяем в уравнении (5, 4) r^κ и $\overline{r}^\kappa$ их значениями из формул (5, 2) и (5, 3). Получаем

$$4\pi f_i = \frac{1}{2}(\nabla_\alpha f^{\kappa\alpha}\overline{F}_{i\kappa} + \nabla_\alpha \overline{f}^{\kappa\alpha}F_{i\kappa}) +$$

$$+\frac{1}{16}(\overline{F}_{\kappa\alpha}F_{\beta\gamma}\nabla_i S^{\kappa\alpha\beta\gamma} + F_{\kappa\alpha}\overline{F}_{\beta\gamma}\nabla_i \overline{S}^{\kappa\beta\gamma});$$

Это выражение легко преобразуется к следующему

$$4\pi f_i = \nabla_\alpha\left\{\frac{1}{2}[f^{\kappa\alpha}\overline{F}_{i\kappa} + \overline{f}^{\kappa\alpha}F_{i\kappa} + \frac{1}{4}\delta^\alpha_i(f^{\kappa\alpha}\overline{F}_{\kappa\alpha} + \overline{f}^{\kappa\alpha}F_{\kappa\alpha})]\right\}$$

или

$$4\pi f_i = -\nabla_\alpha S^\alpha_i \qquad (5,\ 7),$$

где

$$S^\alpha_i = -\frac{1}{2}[f^{\kappa\alpha}\overline{F}_{i\kappa} + \overline{f}^{\kappa\alpha}F_{i\kappa} + \frac{1}{4}\delta^\alpha_i(f^{\kappa\alpha}\overline{F}_{\kappa\alpha} + \overline{f}^{\kappa\alpha}F_{\kappa\alpha})] \qquad (5,\ 8).$$

Следуя принятым определениям физики, назовем тензор, определенный формулой (5, 8), тензором электромагнитной энергии.

В контравариантных координатах уравнение (5, 7) запишется

$$4\pi f^i = -\nabla_\alpha S^{i\alpha} \qquad (5,9),$$

где

$$S^{i\alpha} = -\frac{1}{2}[f^{\sigma\alpha}\overline{F}_{\beta\sigma}g^{\beta i} + \overline{f}^{\sigma\alpha}F_{\beta\sigma}g^{\beta i} + \frac{1}{4}g^{\alpha i}(f^{\sigma\alpha}\overline{F}_{\sigma\alpha} + \overline{f}^{\sigma\alpha}F_{\sigma\alpha})].$$

Уравнение (5, 9), как было упомянуто выше, должно давать в самом общем виде закон сохранения импульса и энергии. Чтобы показать, например, закон сохранения энергии, обратимся к временной составляющей уравнения (5, 9). В случае плоского пространства будем иметь

$$f^4 = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}S^{41} + \frac{\partial}{\partial x_2}S^{42} + \frac{\partial}{\partial x_3}S^{43} + \frac{\partial}{\partial x_4}S^{44}\right)$$

или

$$cf^4 = \frac{c}{8\pi}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\left[\vec{\overline{E}}\cdot\vec{H}\right] + \left[\vec{E}\cdot\vec{\overline{H}}\right]\right)_\alpha + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_{i\kappa}E_i\,\overline{E}_\kappa + \mu^{-1}_{i\kappa}B\ \overline{B}_\kappa).$$

Введем следующие определения:

---

[1] А. А. Эйхенвальд. Электромагнитное поле, ч. VI, 1935 г.

ЭР01663

ЛВГНБ

$$\vec{\gamma} = \frac{c}{8\pi}\left(\left[\vec{E}\cdot\vec{H}\right] + \left[\vec{E}\cdot\vec{\overline{H}}\right]\right) \qquad (5,\ 10)$$

назовем электромагнитным потоком энергии,

$$W = \frac{1}{8\pi}\left(\varepsilon_{i\kappa}E_i\,\overline{E} + \mu^{-1}_{i\kappa}B_i\,\overline{B}_\kappa\right) \qquad (5,\ 11)$$

электромагнитной плотностью энергии. Заметим, что величина для плотности энергии, полученная здесь, в точности совпадает с (5, 1). Что касается вектора Пойтинга, то его выражение также находится в полном соответствии с требованиями, формулированными выше.

Исходя из определений, окончательно будем иметь

$$cf^4 = \frac{\partial W}{\partial t} + div\vec{\gamma} \qquad (5,\ 12).$$

Найденное выражение и есть искомое уравнение сохранения энергии для анизотропно-гиротропной среды.

Легко также показать, что три пространственных составляющих f^1, f^2 и f^3 в их совокупности дают теорему сохранения количества движения.

Наконец, ограничиваясь частным случаем, покажем что в анизотропной и неоднородной среде скалярное произведение $-\frac{1}{c}v^\alpha f_\alpha$, составленное из пространственных составляющих четырехмерной усредненной величины f_i и скорости $\vec{v}$, эквивалентно временной составляющей, т. е.

$$f_4 = -\frac{1}{c}v^\alpha f_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3) \qquad (5,\ 13).$$

По определению

$$f_i = \frac{1}{8\pi}\left(r^\kappa\overline{F}_{i\kappa} + \overline{r^\kappa F_{i\kappa}}\right) + \frac{1}{64\pi}\left(\overline{F}_{\kappa\alpha}F_{\beta\gamma}\nabla_i S^{\kappa\alpha\beta\gamma} + F_{\kappa\alpha}\overline{F}_{\beta\gamma}\nabla_i\overline{S}^{\kappa\alpha\beta\gamma}\right)$$

Если тензоры, характеризующие электромагнитное поле и физическое состояние материи анизотропной и неоднородной среды, считать величинами вещественными, то

$$f_i = \frac{1}{4\pi}r^\kappa F_{i\kappa} + \frac{1}{32\pi}F_{\kappa\alpha}F_{\beta\gamma}\nabla_i S^{\kappa\alpha\beta\gamma},$$

где $$r^\kappa = 4\pi\rho\frac{v^\kappa}{c} \quad (\kappa = 1, 2, 3), \quad r^4 = 4\pi\rho.$$

Требуется показать, что

$$f_4 = \frac{1}{4\pi}r^\kappa F_{4\kappa} + \frac{1}{32\pi}F_{\kappa\alpha}F_{\beta\gamma}\nabla_4 S^{\kappa\alpha\beta\gamma} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi c}v^\sigma r^\kappa F_{\sigma\kappa} - \frac{1}{32\pi c}F_{\kappa\alpha}F_{\beta\gamma}v^\sigma\nabla_\sigma S^{\kappa\alpha\beta\gamma} \quad (\sigma = 1, 2, 3).$$

Первые слагаемые этого равенства равны между собой. Это следует из того, что $\vec{v}$ и $\left[\vec{v}\,\vec{B}\right]$ представляют собой два взаимно пер-

ЭР01663

пендикулярных вектора, скалярное произведение которых равно нулю. Для того, чтобы совпали и вторые слагаемые, достаточно положить, что

$$v^\sigma \nabla_\sigma S^{\alpha\beta\gamma} = -c\nabla_4 S^{\kappa\alpha\beta\gamma} \qquad (5, 14).$$

Если перемещение среды не сопровождается деформацией

$$dV = 0, \quad \Delta_\sigma v^\sigma = 0,$$

то наше условие (5, 14) означает

$$\nabla_\sigma v^\sigma S^{\kappa\alpha\beta\gamma} = -c\nabla_4 S^{\kappa\alpha\beta\gamma}.$$

Таким образом, при условии (5, 14), физический смысл которого понятен, формула (5, 13) действительно выполняется.

§ 6.
Плоские волны в анизотропно-гиротропной среде.

Будем считать, что рассматриваемая среда однородная [$\varepsilon_{ik}(\nu)$ и $\mu^{-1}_{ik}(\nu)$ не зависят от координат и времени], непроводящая ($\sigma = 0$, т. е. заряды находятся в статическом равновесии) и лишена свободных электрических зарядов ($\rho = 0$). Задача сводится к определению закона распространения плоских электромагнитных волн в этой среде.[1]

Распространение электромагнитных колебаний в данной среде не связано с изменением их интенсивности — поглощением, поэтому для векторов поля имеем:

$$f^{ik} = f^{0ik} e^{i\Theta}; \quad F_{ik} = F^0_{ik} e^{i\Theta} \qquad (6, 1),$$

где $\Theta = \omega\left[t - \frac{(\vec{n}\cdot\vec{r})}{u}\right]$ — скалярная функция координат и времени, $\vec{n}_{(\alpha\beta\gamma)}$ — единичный вектор нормали плоской волны, $\vec{r}$ — радиус-вектор от начала координат до рассматриваемой точки, t — время, u — фазовая скорость волны, ω — циклическая частота и F^0_{ik}, f^{0ik} — амплитуды соответствующих векторов поля, не зависящие от времени и координат.

Общие уравнения поля

$$\nabla_{[i} F_{\kappa e]} = 0, \quad \nabla_\alpha f^{i\alpha} = 0$$

$$f^{ik} = \frac{1}{2} S^{ikem} F_{em}, \quad F_{ik} = \frac{1}{2} T_{ikem} f^{em} \qquad (6, 2)$$

принимают в случае плоского пространства и времени следующий вид

$$\partial_{[i} F_{\kappa e]} = 0, \quad \partial_\alpha f^{i\alpha} = 0$$

$$f^{ik} = \frac{1}{2} S^{ikem} F_{em}, \quad F_{ik} = \frac{1}{2} T_{ikem} f^{em} \qquad (6, 3).$$

Подставляя в систему уравнений (6, 3) значения векторов поля из (6, 1), получим

$$\Theta_{[i} F_{\kappa e]} = 0, \quad \Theta_\alpha f^{i\alpha} = 0$$

$$f^{ik} = \frac{1}{2} S^{ikem} F_{em}, \quad F_{ik} = \frac{1}{2} T_{ikem} f^{em} \qquad (6, 4)$$

---

[1] Усложнения, вызываемые пограничными явлениями, не учитываются. Считаем, что среда безгранична.

ЭР01663

или $$\Theta_\alpha F^{*i\alpha}=0, \quad \Theta_{[i}f^*_{\kappa e]}=0$$

$$f^{*i\kappa}=\frac{1}{2}S^{*i\kappa em}F^{*em}, \quad F^{*i\kappa}=\frac{1}{2}T^{*i\kappa em}f^*_{em} \qquad (6,5).$$

В уравнениях (6, 5) $S^*_{i\kappa em}$, $T^{*i\kappa em}$ и $F^{*i\kappa}$, $f^*_{i\kappa}$ — дуальные тензоры к $S^{i\kappa em}$, $T_{i\kappa em}$ и $F_{i\kappa}$, $f^{i\kappa}$, — соответственно, определяемые формулами

$$f^*_{i\kappa}=\frac{1}{2}l_{i\kappa\alpha\beta}f^{\alpha\beta}; \quad F^{*i\kappa}=\frac{1}{2}l^{i\kappa\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$$

и $$S^*_{i\kappa em}=\frac{1}{4}l_{i\kappa\alpha\beta}l_{em\sigma\tau}S^{\alpha\beta\sigma\tau}; \quad T^{*i\kappa em}=\frac{1}{4}l^{i\kappa\alpha\beta}l^{em\sigma\tau}T_{\alpha\beta\sigma\tau} \qquad (6,6).$$

Уравнения $\Theta_\alpha f^{i\alpha}=0$, с одной стороны, и $\Theta_\alpha F^{*i\alpha}=0$, с другой, можно рассматривать как систему линейных однородных уравнений относительно неизвестных Θ_α. Поэтому уравнения $\Theta_\alpha f^{i\alpha}=0$ и $\Theta_\alpha F^{*i\alpha}=0$ имеют решение, отличное от нулевого, в том случае, если детерминанты коэффициентов $f^{i\alpha}$ и $F^{*i\alpha}$ равняются нулю, т. е.

$$|f^{i\kappa}|=l_{impr}l_{\kappa nqs}f^{i\kappa}f^{mn}f^{pq}f^{rs}=(l_{i\kappa em}f^{i\kappa}f^{em})^2=0$$

$$|F^{*i\kappa}|=l_{impr}l_{\kappa nqs}F^{*i\kappa}F^{*mn}F^{*pq}F^{*rs}=(l_{i\kappa em}F^{*i\kappa}F^{*em})^2=0$$

Откуда

$$l_{i\kappa em}f^{i\kappa}f^{em}=0, \quad l_{i\kappa em}F^{*i\kappa}F^{*em}=0 \qquad (6,7)$$

или в векторной форме

$$\left(\vec{H}\cdot\vec{D}\right)=0; \quad \left(\vec{E}\cdot\vec{B}\right)=0$$

Из уравнений (6, 4) и (6, 5) таким образом получаем, что в любой координатной системе, с которой мы связываем изменение электромагнитного поля световой волны, между слагающими поля будут всегда существовать инвариантные соотношения вида (6, 7), выражающие собою перпендикулярность векторов поля $\vec{H}$ и $\vec{D}$, $\vec{E}$ и $\vec{B}$.

Чтобы получить закон распространения F_{em}, решим совместно уравнения $\Theta_\alpha f^{i\alpha}=0$ и $f^{i\alpha}=\frac{1}{2}S^{i\alpha em}F_{em}$. Находим $\Theta_\alpha S^{i\alpha em}F_{em}=0$.

Умножив на Θ_k, получим

$$\Theta_\alpha\Theta_\kappa S^{i\alpha em}F_{em}=0.$$

Это уравнение, будучи антисимметризировано в значках i и k, дает нам шесть уравнений с шестью неизвестными F_{em}, т. е.

$$\Theta_\alpha[\Theta_\kappa S^{i\alpha em}-\Theta_i S^{\kappa\alpha em}]F_{em}=0 \qquad (6,8).$$

Отсюда, если приравнять определитель шестого порядка нулю, получаем волновое уравнение (уравнение Френеля). Однако, ввиду сложности, я ограничиваюсь исследованием этой задачи для потенциала Φ_i.

Уравнения (6, 4), пользуясь скалярным потенциалом φ и векторным A или, что то же самое, четырехмерным тензором Φ_i, можно переписать в следующем виде

$$F_{\kappa e}=\partial_e\Phi_\kappa-\partial_\kappa\Phi_e=2_i\,\Theta_{[e}\Phi_{\kappa]}, \quad \Theta_\alpha f^{i\alpha}=0$$

$$f^{i\alpha}=\frac{1}{2}S^{i\alpha\kappa e}F_{\kappa e}, \quad F_{\kappa e}=\frac{1}{2}T_{\kappa etn}f^{mn} \qquad (6,9).$$

ЭР01663

Из условий их совместимости находим

$$\Theta_\alpha f^{i\alpha} = \frac{1}{2}\Theta_\alpha S^{i\alpha ke}F_{ke} = i\Theta_\alpha S^{i\alpha ke}\Theta_{[e}\Phi_{k]} = 0$$

или

$$\Theta_\alpha S^{i\alpha ke}\Theta_e \Phi_k - \Theta_\alpha S^{i\alpha ke}\Theta_k \Phi_e = 0.$$

Производя замену суммационных значков во втором слагаемом k на e и пользуясь свойствами симметрии тензора S^{iake}, получим

$$S^{i\alpha ke}\Theta_\alpha \Theta_e \Phi_k = S^{i\alpha_k\beta}\Theta_\alpha \Theta_\beta \Phi_k = 0 \qquad (6, 10).$$

Полученные уравнения можно рассматривать как совокупность четырех однородных уравнений, линейных относительно неизвестных Φ_k. Тогда равенство нулю детерминанта коэффициентов при неизвестных Φ_k есть необходимое и достаточное условие для системы (6, 10), чтобы последняя имела решение, отличное от нулевого. Таким образом имеем

$$| S^{i\alpha k\beta}\Theta_\alpha \Theta_\beta | = 0.$$

Вполне очевидно

$$S^{i\alpha_k\beta}\Theta_\alpha \Theta_\beta \Theta_i \equiv 0.$$

Отсюда непосредственно следует, что любая строка (столбец) определителя $| S^{i\alpha k\beta}\Theta_\alpha \Theta_\beta |$ может быть выражена через сумму трех других строк (столбцов). Точнее, любая строка (столбец) есть следствие трех остальных. Следовательно, согласно основным свойствам теории определителей, будем иметь

$$| S^{i\alpha k\beta}\Theta_\alpha \Theta_\beta | \equiv 0.$$

Выражая Θ_α, Θ_β через направляющие косинусы и фазовую скорость, находим окончательно

$$| S^{i\alpha k\beta} n_\alpha n_\beta | \equiv 0. \qquad (6, 11),$$

где n_1, n_2 и n_3 — направляющие косинусы нормали плоской волны, $n_4 = u$ — фазовая скорость волны.

Из (6, 5) аналогично получаем

$$| T^{*i\alpha_k\beta} n_\alpha n_\beta | = | T_{\sigma\tau\mu\nu} l^{i\alpha\sigma\tau} l_{k\beta\mu\nu} n_\alpha n_\beta | \equiv 0 \qquad (6, 12).$$

Выражение (6, 11), очевидно, не может иметь какой-либо интерес, ибо оно есть тождество. Поэтому мы обратимся к рассмотрению алгебраических дополнений, соответствующих элементам определителя (6, 11). Как будет показано ниже, выражение, соответствующее адъюнкту определителя $| S^{i\alpha k\beta} n_\alpha n_\beta |$, имеет вполне определенное физическое значение.

Итак, на основании известных правил алгебры, перепишем четырехмерный определитель $| S^{i\alpha k\beta} n_\alpha n_\beta |$ в следующей форме

$$| S^{i\alpha k\beta} n_\alpha n_\beta | = \frac{1}{24} l_{impr} l_{knqs} S^{i\alpha k\gamma} S^{m\sigma n\tau} S^{p\beta q\delta} S^{r\mu s\nu} n_\alpha n_\gamma n_\sigma n_\tau n_\beta n_\delta n_\mu n_\nu \quad (6, 13)$$

или

$$| S^{i\alpha k\beta} n_\alpha n_\beta | = \frac{1}{4} \triangle_{rs} S^{r\mu s\nu} n_\mu n_\nu \equiv 0 \qquad (6, 13),$$

где $\triangle_{rs}$ — выражают собою алгебраические дополнения элементов $S^{r\mu s\nu} n_\mu n_\nu$ определителя $| S^{i\alpha k\beta} n_\alpha n_\beta |$ и определяются следующей формулой

$$\triangle_{rs} = \frac{1}{6} l_{impr} l_{knqs} S^{i\alpha k\gamma} S^{m\sigma n\tau} S^{p\beta q\delta} n_\alpha n_\gamma n_\sigma n_\tau n_\beta n_\delta \qquad (6, 15)$$

ЭР01663

Из (6, 15) и свойств симметрии (1, 3) следует, что

$$\Delta_{rs} = \overline{\Delta}_{sr} = \frac{1}{6} l_{impr} l_{knqs} S^{i\alpha\kappa\gamma} S^{m\sigma n\tau} S^{p\beta q\delta} n_\alpha n_\gamma n_\sigma n_\tau n_\beta n_\delta .$$

Так как в нашем случае определители Δ_{rs} третьего порядка, то, согласно основным свойствам теории определителей, Δ_{rs} суть величины вещественные. Следовательно,

$$\Delta_{rs} = \Delta_{sr} \qquad (6, 16).$$

Вычисления (см. приложение в конце статьи) показывают, что

$$\Delta_{rs} = \frac{1}{24} l_{impt} l_{knq\eta} S^{i\alpha\kappa\gamma} S^{m\sigma n\tau} S^{ptq\eta} n_\alpha n_\gamma n_\sigma n_\tau n_r n_s = \frac{1}{24} M n_r n_s \quad (6, 17),$$

где

$$M = l_{impr} l_{knq\eta} S^{i\alpha\kappa\gamma} S^{m\sigma n\tau} S^{ptq\eta} n_\alpha n_\gamma n_\sigma n_\tau \qquad (6, 18).^1$$

Заметим, утверждение (6, 16) непосредственно вытекает из (6, 17).

Уравнения (6, 10), как было выше указано, представляют собою совокупность четырех однородных уравнений, линейных относительно Φ_k. Как известно, электромагнитные потенциалы Φ_1, Φ_2, Φ_3 и Φ_4 не могут быть определены однозначно из уравнений Максвелла. Для освобождения от этого произвола обыкновенно из всех возможных значений потенциалов выбирают те, для которых удовлетворяется условие, имеющее в случае изотропной среды вид линейного соотношения

$$div\, A = -\frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Это соотношение не может быть обобщено на случай анизотропно-гиротропной среды. Поэтому заменяем его соответственным требованием, т. е. считаем, что все миноры третьего порядка в системе уравнений (6, 10) должны обращаться в нуль. Такое требование, представляющее инвариантную форму дополнительного условия, накладываемого на потенциалы в общем случае анизотропно-гиротропной среды, ведет к выводу волнового уравнения Френеля.

Итак, требование $\Delta_{rs} = 0$ эквивалентно

$$M = l_{impt} l_{knq\eta} S^{i\alpha\kappa\gamma} S^{m\sigma n\tau} S^{ptq\eta} n_\alpha n_\gamma n_\sigma n_\tau = 0 \qquad (6, 19).$$

Последнее, если ввести четырехмерный тензор 4-го ранга, определяющийся по формуле

$$h^{\alpha\sigma\gamma\tau} = \frac{1}{24} l_{impt} l_{knq\eta} S^{i\alpha\kappa\gamma} S^{m\sigma n\tau} S^{ptq\eta} \qquad (6, 20),$$

приводится к следующему виду

$$M = -24 h^{\alpha\sigma\gamma\tau} n_\alpha n_\gamma n_\sigma n_\tau = 0,$$

откуда

$$h^{\alpha\sigma\gamma\tau} n_\alpha n_\gamma n_\sigma n_\tau = 0 \qquad (6, 21).^2$$

Для анизотропно-гиротропной среды тензор $h^{\alpha\sigma\gamma\tau}$ обладает следующими инвариантными свойствами симметрии

---

[1] Равенство (6, 18) не есть единственно возможное выражение инварианта M. Мы можем, например, за M взять следующие выражения:

$$M = 2M_1 = 2 l_{impt} l_{knq\eta} S^{i\alpha\kappa\gamma} S^{m\sigma nt} S^{p\tau q\eta} n_\alpha n_\gamma n_\sigma n_\tau =$$
$$= M_2 = l_{impt} l_{knq\eta} S^{i\alpha\kappa\gamma} S^{mtn\tau} S^{p\sigma q\eta} n_\alpha n_\gamma n_\sigma n_\tau \text{ и т. д.}$$

[2] Уравнение (6, 21) будет иметь такой же вид и в том случае, если принять во внимание затухание.

ЭР01663

$$h^{\alpha\sigma\gamma\tau} = h^{\sigma\alpha\tau\gamma} = \overline{\overline{h}}^{\gamma\tau\alpha\sigma} = \overline{\overline{h}}^{\tau\gamma\sigma\alpha} \neq h^{\alpha\sigma\tau\gamma} = h^{\sigma\alpha\gamma\tau} = \overline{\overline{h}}^{\gamma\tau\sigma\alpha} = \overline{\overline{h}}^{\tau\gamma\alpha\sigma} \neq$$
$$\neq h^{\alpha\gamma\sigma\tau} = h^{\gamma\alpha\tau\sigma} = \overline{\overline{h}}^{\sigma\tau\alpha\gamma} = \overline{\overline{h}}^{\tau\sigma\gamma\alpha} \qquad (6, 22).$$

Пользуясь тензориальным соотношением (6, 20) и свойствами симметрии (6, 22), находим[1]

$h^{1111} = \varepsilon_1\mu_2^{-1}\mu_3^{-1}$, $h^{2222} = \varepsilon_2\mu_1^{-1}\mu_3^{-1}$, $h^{3333} = \varepsilon_3\mu_1^{-1}\mu_2^{-1}$

$h^{4444} = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 - 16\pi^2(\varepsilon_1 G_1^{g^2} + \varepsilon_2 G_2^{g^2} + \varepsilon_3 G_3^{g^2})$

$h^{1212} = h^{2121} = \frac{1}{2}(\varepsilon_1\mu_1^{-1}\mu_3^{-1} + \varepsilon_2\mu_2^{-1}\mu_3^{-1}) + \frac{1}{6}\varepsilon_3\mu_3^{-1}\mu_3^{-1}$; $h^{1221} = h^{2112} = -\frac{1}{6}\varepsilon_3\mu_3^{-1}\mu_3^{-1}$

$h^{2323} = h^{3232} = \frac{1}{2}(\varepsilon_2\mu_1^{-1}\mu_2^{-1} + \varepsilon_3\mu_1^{-1}\mu_3^{-1}) + \frac{1}{6}\varepsilon_1\mu_1^{-1}\mu_1^{-1}$; $h^{2332} = h^{3223} = -\frac{1}{6}\varepsilon_1\mu_1^{-1}\mu_1^{-1}$

$h^{1313} = h^{3131} = \frac{1}{2}(\varepsilon_3\mu_2^{-1}\mu_3^{-1} + \varepsilon_1\mu_1^{-1}\mu_2^{-1}) + \frac{1}{6}\varepsilon_2\mu_2^{-1}\mu_2^{-1}$; $h^{1331} = h^{3113} = -\frac{1}{6}\varepsilon_2\mu_2^{-1}\mu_2^{-1}$

$h^{1414} = h^{4141} = -\frac{1}{2}(\varepsilon_1\varepsilon_3\mu_3^{-1} + \varepsilon_1\varepsilon_2\mu_2^{-1}) + \frac{1}{3}16\pi^2(\mu_3^{-1}G_2^{g^2} + \mu_2^{-1}G_3^{g^2}) - \frac{1}{6}\varepsilon_1\varepsilon_1\mu_1^{-1}$

$h^{1441} = h^{4114} = \frac{1}{6}16\pi^2(\mu_3^{-1}G_2^{g^2} + \mu_2^{-1}G_3^{g^2}) + \frac{1}{6}\varepsilon_1\varepsilon_1\mu_1^{-1}$

$h^{2424} = h^{4242} = -\frac{1}{2}(\varepsilon_1\varepsilon_2\mu_1^{-1} + \varepsilon_2\varepsilon_3\mu_3^{-1}) + \frac{1}{3}16\pi^2(\mu_1^{-1}G_3^{g^2} + \mu_3^{-1}G_1^{g^2}) - \frac{1}{6}\varepsilon_2\varepsilon_2\mu_2^{-1}$

$h^{2442} = h^{4224} = \frac{1}{6}16\pi^2(\mu_1^{-1}G_3^{g^2} + \mu_3^{-1}G_1^{g^2}) + \frac{1}{6}\varepsilon_2\varepsilon_2\mu_2^{-1}$

$h^{3434} = h^{4343} = -\frac{1}{2}(\varepsilon_2\varepsilon_3\mu_2^{-1} + \varepsilon_1\varepsilon_3\mu_1^{-1}) + \frac{1}{3}16\pi^2(\mu_2^{-1}G_1^{g^2} + \mu_1^{-1}G_2^{g^2}) - \frac{1}{6}\varepsilon_3\varepsilon_3\mu_3^{-1}$

$h^{3443} = h^{4334} = \frac{1}{6}16\pi^2(\mu_2^{-1}G_1^{g^2} + \mu_1^{-1}G_2^{g^2}) - \frac{1}{6}\varepsilon_3\varepsilon_3\mu_3^{-1}$

$h^{1424} = h^{4142} = \overline{h}^{2414} = \overline{h}^{4241} = -\frac{1}{3}16\pi^2\mu_3^{-1}G_1^{g}G_2^{g} - i\frac{1}{2}4\pi\varepsilon_3\mu_3^{-1}G_3^{g} -$
$- i\frac{1}{6}4\pi\varepsilon_1\mu_1^{-1}G_3^{g} - i\frac{1}{6}4\pi\varepsilon_2\mu_2^{-1}G_3^{g}$

$h^{1442} = h^{4124} = \overline{h}^{2441} = \overline{h}^{4214} = -\frac{1}{6}16\pi^2\mu_3^{-1}G_1^{g}G_2^{g} + i\frac{1}{6}4\pi\varepsilon_1\mu_1^{-1}G_3^{g} + i\frac{1}{6}4\pi\varepsilon_2\mu_2^{-1}G_3^{g}$

$h^{2434} = h^{4243} = \overline{h}^{3424} = \overline{h}^{4342} = -\frac{1}{3}16\pi^2\mu_1^{-1}G_2^{g}G_3^{g} - i\frac{1}{2}4\pi\varepsilon_1\mu_1^{-1}G_1^{g} -$
$- i\frac{1}{6}4\pi\varepsilon_3\mu_3^{-1}G_1^{g} - i\frac{1}{6}4\pi\varepsilon_2\mu_2^{-1}G_1^{g}$

$h^{2443} = h^{4334} = \overline{h}^{3424} = \overline{h}^{4342} = -\frac{1}{6}16\pi^2\mu_1^{-1}G_2^{g}G_3^{g} + i\frac{1}{6}4\pi\varepsilon_3\mu_3^{-1}G_1^{g} + i\frac{1}{6}4\pi\varepsilon_2\mu_2^{-1}G_1^{g}$

$h^{3414} = h^{4341} = \overline{h}^{1434} = \overline{h}^{4143} = -\frac{1}{3}16\pi^2\mu_2^{-1}G_1^{g}G_3^{g} - i\frac{1}{2}4\pi\varepsilon_2\mu_2^{-1}G_2^{g} -$
$- i\frac{1}{6}4\pi\varepsilon_1\mu_1^{-1}G_2^{g} - i\frac{1}{6}4\pi\varepsilon_3\mu_3^{-1}G_2^{g}$

[1] Нижеуказанная таблица значений коэффициентов вычислена в предположении, когда магнитная гирация отсутствует.

ЭР01663

$$h^{3141}=h^{4314}=\overline{h}^{4134}=\overline{h}^{1443}=-\frac{1}{6}16\pi^2\mu_2^{-1}G_1^3G_3^3+i\frac{1}{6}4\pi\varepsilon_1\mu_1^{-1}G_2^3+i\frac{1}{6}4\pi\varepsilon_3\mu_3^{-1}G_2^3$$

$$h^{1222}=h^{2122}=\overline{h}^{2212}=\overline{h}^{2221}=i\frac{1}{2}4\pi\mu_1^{-1}\mu_3^{-1}G_3^3$$

$$h^{1112}=h^{1121}=\overline{h}^{1211}=\overline{h}^{2111}=i\frac{1}{2}4\pi\mu_2^{-1}\mu_3^{-1}G_3^3$$

$$h^{1113}=h^{1131}=\overline{h}^{1311}=\overline{h}^{3111}=-i\frac{1}{2}4\pi\mu_2^{-1}\mu_3^{-1}G_2^3$$

$$h^{1333}=h^{3133}=\overline{h}^{3313}=\overline{h}^{3331}=-i\frac{1}{2}4\pi\mu_1^{-1}\mu_2^{-1}G_2^3$$

$$h^{2333}=h^{3233}=\overline{h}^{3323}=\overline{h}^{3332}=i\frac{1}{2}4\pi\mu_1^{-1}\mu_2^{-1}G_1^3$$

$$h^{3222}=h^{2322}=\overline{h}^{2232}=\overline{h}^{2223}=i\frac{1}{2}4\pi\mu_1^{-1}\mu_3^{-1}G_1^3$$

$$h^{1213}=h^{2131}=\overline{h}^{1312}=\overline{h}^{3121}=i\frac{1}{3}4\pi\mu_2^{-1}\mu_3^{-1}G_1^3$$

$$h^{1231}=h^{2113}=\overline{h}^{3112}=\overline{h}^{1321}=i\frac{1}{6}4\pi\mu_2^{-1}\mu_3^{-1}G_1^3$$

$$h^{2321}=h^{3212}=\overline{h}^{2123}=\overline{h}^{1232}=i\frac{1}{3}4\pi\mu_1^{-1}\mu_3^{-1}G_2^3$$

$$h^{2312}=h^{3221}=\overline{h}^{1223}=\overline{h}^{2132}=i\frac{1}{6}4\pi\mu_1^{-1}\mu_3^{-1}G_2^3$$

$$h^{3132}=h^{1323}=\overline{h}^{3231}=\overline{h}^{2313}=i\frac{1}{3}4\pi\mu_1^{-1}\mu_2^{-1}G_3^3$$

$$h^{3123}=h^{1332}=\overline{h}^{2331}=\overline{h}^{3213}=i\frac{1}{6}4\pi\mu_1^{-1}\mu_2^{-1}G_3^3$$

Не указанные в таблице коэффициенты, соответствующие остальным компонентам тензора $h^{\alpha\sigma\gamma\tau}$, равны нулю.

Подставим полученные значения коэффициентов в уравнение (6, 21). Выполнив вычисления и алгебраические преобразования, находим

$$\frac{1}{2}l_{ike}^2\Big[n_i^4\varepsilon_i\mu_\kappa^{-1}\mu_e^{-1}+n_i^2n_\kappa^2\mu_e^{-1}(\varepsilon_i\mu_i^{-1}+\varepsilon_\kappa\mu_\kappa^{-1})-n_4^2n_i^2\varepsilon_i^2(\varepsilon_\kappa\mu_\kappa^{-1}+\varepsilon_e\mu_e^{-1})+$$

$$+\frac{1}{3}n_4^4\varepsilon_i\varepsilon_\kappa\varepsilon_e+16\pi^2n_4^2n_i^2(\mu_\kappa^{-1}G_e^{3^2}+\mu_e^{-1}G_\kappa^{3^2})-16\pi^2n_4^4\varepsilon_iG_i^{3^2}-$$

$$-32\pi^2n_4^2n_in_\kappa\mu_e^{-1}G_i^3G_\kappa^3\Big]=0 \qquad (6,\ 24),$$

где $l_{ike}-(i,\ k,\ e=1,\ 2,\ 3)$ — единичный антисимметричный тензор 3-го ранга. Это равенство, которое есть явное выражение уравнения (6, 21), представляет собою закон распространения световых волн в анизотропной среде при наличии электрической гирации. Замечаем, оно относительно n_4^2 — фазовой скорости распространения плоской

ЭР01663

ДВГНБ

волны — биквадратичное. Во-вторых, произвольно заданному направлению $\vec{n}$ соответствует два разных значения n_4^2. Физически это означает, что мы имеем дело с двойным лучепреломлением и возможностью распространения плоских волн как в положительном направлении, так и в обратном.

Не представляется большой трудности получить явное уравнение распространения плоских волн в анизотропной среде при наличии электрической и магнитной гираций, а также и затухания.

Из уравнения (6, 24), если в последнем положить равным нулю члены, содержащие электрическую гирацию (т. е. считать среду только анизотропной), получаем

$$\frac{1}{2}\, l^2_{ike}\left[n_i^4 \varepsilon_i \mu_\kappa^{-1} \mu_e^{-1} + n_i^2 n_\kappa^2 \mu_e^{-1}\left(\varepsilon_i \mu_i^{-1} + \varepsilon_\kappa \mu_\kappa^{-1}\right) - \right.$$

$$\left. - n_4^2 n_i^2 \varepsilon_i^2 \left(\mu_\kappa^{-1} \varepsilon_\kappa + \varepsilon_e \mu_e^{-1}\right) + \frac{1}{3} n_4^4 \varepsilon_i \varepsilon_\kappa \varepsilon_e\right] = 0 \qquad (6,\ 25).$$

Это уравнение в точности совпадает с формулами волнового уравнения, выведенными Иг. Таммом[1] и Хевисайдом[2], и может быть выведено также из волнового уравнения для составляющих поля, которое будет являться обобщением (на случай $\mu^{-1} \neq 1$) вывода уравнения Френеля.

Рассуждение, сводящееся к требованию $\triangle_{rs} = 0$ для всех r и s, представляет, таким образом, общую, вполне релятивистски-инвариантную формулировку и вывод волнового уравнения для плоских волн в анизотропно-гиротропной среде.

В средах неизотропных вектор потока энергии излучения, определяющий направление распространения световых лучей, не совпадает с направлением распространения плоских волн. Поэтому целесообразно, наряду с рассматриваемым выше уравнением для фазовой волновой скорости, получить уравнение для скорости распространения энергии.

Уравнение для скорости распространения энергии формально может быть получено следующим образом. Введем по аналогии с формулой (6, 20) тензор

$$\chi_{\alpha\sigma\gamma\tau} = -\frac{1}{24}\, l^{imnt} l^{\kappa n q \eta}\, T_{i\alpha\kappa\gamma}\, T_{m\sigma n\tau}\, T_{pt q\eta} \qquad (6,\ 26)$$

и образуем от него скалярное произведение с четырехмерным тензором l^k в виде

$$\chi_{\alpha\sigma\gamma\tau}\, l^\alpha\, l^\sigma\, l^\gamma\, l^\tau = 0 \qquad (6,\ 27),$$

где l^k — $(k = 1, 2, 3)$ — составляющие единичного вектора $\vec{l}$, направление которого совпадает с вектором потока энергии излучения, $l^4 = \frac{1}{v}$ — лучевая скорость, величина которой может быть определена по формуле

$$u = \left(\vec{n} \cdot \vec{v}\right) = (n_1 l^1 + n_2 l^2 + n_3 l^3) v = v \cos\Theta \left(\vec{n} : \vec{l}\right) \qquad (6,\ 28).$$

[1] И г. Тамм. Ж. Р. Ф.-Х. О., т. LVII, 1925 г.
[2] Heaviside. El.-magn. Theory, v. II.

ЭР01663

Утверждаю, что равенство (6, 27) есть искомое уравнение распространения энергии, из которого можно определить величину скорости v.

Рассмотрим тот случай, когда среда физически анизотропна, однородна и прозрачна (гирация, электрическая и магнитная, равна нулю). Подставляя в уравнение (6, 27) вместо $\chi_{\alpha\sigma\gamma\tau}$ их значения, получаемые из (6, 26), находим для этого частного случая

$$\frac{1}{2} l^2_{ike}\left[v^4 l^i \varepsilon_i^{-1}\mu_\kappa\mu_e + v^4 l^{i^2} l^\kappa \mu_e(\mu_i \varepsilon_i^{-1} + \mu_\kappa \varepsilon_\kappa^{-1}) - \right.$$

$$\left. - v^2 l^{i^2}\varepsilon_i^{-1}(\mu_\kappa \varepsilon_\kappa^{-1} + \mu_e \varepsilon_e^{-1}) + \frac{1}{3}\varepsilon_i^{-1}\varepsilon_\kappa^{-1}\varepsilon_e^{-1}\right] = 0 \qquad (6, 29),$$

где l_{ike} — $(ike = 1, 2, 3)$ — единичный антисимметричный тензор 3-го ранга. Это равенство представляет собой закон распространения энергии в анизотропной среде.[1] Таким образом сделанное выше утверждение следует считать доказанным.

По форме уравнение (6, 27) совпадает с уравнением (6, 21). Поэтому выводы, следующие из него, аналогичны предыдущим, т. е. каждому заданному направлению $\vec{l}$ соответствует два разных значения для v^2.

Уравнения распространения волн (6, 21) и энергии (6, 27) можно переписать также в дифференциальной форме.

Из условия перпендикулярности мировых линий — линий распространения световых волн — к поверхности равной фазы $\Theta(xyzt) = \text{const}$. имеем

$$n_i = \lambda dx_i \qquad (6, 30),$$

где λ — множитель пропорциональности. Вставляя значение для $n_i = \lambda dx_i$ в уравнение (6, 21), получим

$$h^{\alpha\sigma\gamma\tau} dx_\alpha dx_\sigma dx_\gamma dx_\tau = 0 \qquad (6, 31).$$

Точно так же может быть получено и дифференциальное уравнение распространения энергии. В самом деле, возьмем какой-либо контравариантный вектор l^α. Всегда можно найти такой бесконечно малый вектор dx^α, который имеет то же направление, что и вектор l^α, точнее говоря, вектор dx^α, составляющие которого пропорциональны составляющим вектора l^α:

$$l^\alpha = \mu dx^\alpha \qquad (6, 32),$$

где μ — множитель пропорциональности. При выполнении условия (6, 32) находим

$$\chi_{\alpha\sigma\gamma\tau} dx^\alpha dx^\gamma dx^\sigma dx^\tau = 0 \qquad (6, 33),$$

которое получается из уравнения (6, 27) заменой l^α на dx^α. Все рассуждения имеют инвариантный характер, поэтому они должны иметь силу в любой координатной системе.

В заключение приведем пример приложения полученных результатов к изотропной среде.

В анизотропно-гиротропной среде тензор S^{iklm} с нашими свойствами симметрии содержит в системе K двенадцать независимых со-

[1] Уравнение (6, 29) было получено И г. Т а м м о м. Ж. Р. Ф.-Х. О., т. LVII, 1925 г. и Cohn'ом. El.-magn. Feld, s. 570.

ЭР01663

ставляющих и может быть выражен через 2 тензора 2-го ранга следующим образом

$$S^{ikem}=\frac{1}{2}(s^{ie}p^{km}+s^{km}p^{ie}-s^{im}p^{ke}-s^{ke}p^{im}) \qquad (6,\ 34).$$

По аналогии с S^{ikem} для обратного тензора будем иметь

$$T_{ikem}=\frac{1}{2}(t_{ie}q_{km}+t_{km}q_{ie}-t_{im}q_{ke}-t_{ke}q_{im}) \qquad (6,\ 35).$$

Переходя к изотропной среде, получим

$$S^{ikem}=s^{ie}s^{km}-s^{im}s^{ke} \qquad (6,\ 36)$$

и

$$T_{ikem}=t_{ie}t_{km}-t_{im}t_{ke} \qquad (6,\ 37),$$

в которой компоненты тензоров s^{ik} и t_{ik} для покоящейся координатной системы K^0 определяются следующими матрицами:

$$(s^{ik})=\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{\mu}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\mu}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\mu}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon\sqrt{\mu} \end{vmatrix};\quad (t_{ik})=\begin{vmatrix} \sqrt{\mu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\mu}} \end{vmatrix} \qquad (6,\ 38).$$

На основании (6, 36) тензориальное соотношение (6, 20) запишется

$$h^{\alpha\sigma\gamma\tau}=-\frac{1}{24}l_{impr}l_{knqs}(s^{ik}s_{\alpha\gamma}-s_{i\gamma}s^{\alpha}{}_{k})(s^{mn}s^{\sigma\tau}-s_{m\tau}s^{\sigma n})(s^{pq}s^{rs}-s^{ps}s^{rq})=$$

$$=-\frac{1}{12}l_{impr}l_{knqs}s^{ik}s^{pq}s^{rs}(s^{mn}s^{\alpha\gamma}s^{\sigma\tau}-s^{\alpha}{}_{n}s^{m\gamma}s^{\sigma\tau}-s^{\sigma n}s^{m\tau}s^{\alpha\gamma})-$$

$$-\frac{1}{12}l_{impr}l_{knqs}s^{pq}s^{rs}s^{\alpha k}s^{i\gamma}s^{\sigma n}s^{m\tau}$$

Выражение, стоящее перед скобками, представляет собой помноженный на 3! минор определителя $\bar{s}=|s^{ik}|$, соответствующий члену s^{mn}. Взяв этот минор и разделив его на определитель $\bar{s}$, мы получим систему n^2 величин для тензора t_{mn}

$$t_{mn}=\frac{\triangle_{mn}}{\bar{s}} \qquad (6,\ 39),$$

обладающих следующим свойством

$$s^{i\alpha}t_{k\alpha}=\delta^{i}_{k} \qquad (6,\ 40).$$

Из соотношения $\frac{1}{12}l_{impr}l_{knqs}s^{pq}s^{rs}s^{\alpha k}s^{i\gamma}s^{\sigma n}s^{m\tau}$, которое мы для краткости обозначим через $K^{\alpha\sigma\gamma\tau}$, непосредственно следует

$$K^{\alpha\sigma\gamma\tau}=-K^{\sigma\alpha\gamma\tau}=-K^{\alpha\sigma\tau\gamma} \qquad (6,\ 41).$$

Следовательно,

$$h^{\alpha\sigma\gamma\tau}=-\frac{1}{2}\bar{s}t_{mn}(s^{mn}s^{\alpha\gamma}s^{\sigma\tau}-s^{\alpha n}s^{m\gamma}s^{\sigma\tau}-s^{\sigma n}s^{m\tau}s^{\alpha\gamma})-K^{\alpha\sigma\gamma\tau}=-\bar{s}s^{\alpha\gamma}s^{\sigma\tau}-K^{\alpha\sigma\gamma\tau}.$$

ЭР01663

ДВГНБ

Заменяя в уравнении (6, 21) $h^{\alpha\sigma\gamma\tau}$ полученным для него нами выражением, находим

$$s^{\alpha\gamma}s^{\sigma\tau}n_\alpha n_\gamma n_\sigma n_\tau = (s^{\alpha\gamma}n_\alpha n_\gamma)^2 = 0,$$

откуда

$$s^{\alpha\gamma}n_\alpha n_\gamma = 0 \qquad (6, 42).$$

Последнее, в чем легко убедиться, находится в полном соответствии с волновым уравнением распространения световых волн в изотропной среде, имеющим место в классической электродинамике.

Приложение к стр. 191.

$$\left| S^{i\alpha\kappa\gamma} n_\alpha n_\gamma \right| = \frac{1}{24} l_{impr} l_{knqs} S^{i\alpha\kappa\gamma} S^{m\sigma n\tau} S^{p\beta q\delta} S^{r\mu s\nu} n_\alpha n_\gamma n_\sigma n_\tau n_\beta n_\delta n_\mu n_\nu =$$

$$= l_{impr} S^{i\alpha 1\gamma} S^{m\sigma 2\gamma} S^{p\beta 3\delta} S^{r\mu 4\nu} n_\alpha n_\gamma n_\sigma n_\tau n_\beta n_\delta n_\mu n_\nu .$$

Алгебраические дополнения, соответствующие, например, элементам 4-й строки, запишутся

$$\triangle_{r4} = l_{impr} S^{i\alpha 1\gamma} S^{m\sigma 2\tau} S^{p\beta 3\delta} n_\alpha n_\gamma n_\sigma n_\tau n_\beta n_\delta,$$

откуда

$$\triangle_{14} = l_{imp1} S^{i\alpha 1\gamma} S^{m\sigma 2\tau} S^{p\beta 3\delta} n_\alpha n_\gamma n_\sigma n_\tau n_\beta n_\delta.$$

Выполнив вычисления и алгебраические преобразования, в предположении $\vec{G}^m = 0$, находим[1]

$$\triangle_{14} = -\frac{24}{24} \cdot \frac{1}{2} l^2_{i\kappa e} \Big[n_i^4 \varepsilon_i \mu_\kappa^{-1} \mu_e^{-1} + n_i^2 n_\kappa^2 \mu_e^{-1} (\varepsilon_i \mu_i^{-1} + \varepsilon_\kappa \mu_\kappa^{-1}) -$$

$$- n_4^2 n_i^2 \varepsilon_i (\varepsilon_\kappa \mu_\kappa^{-1} + \varepsilon_e \mu_e^{-1}) + \frac{1}{3} n_4^4 \varepsilon_i \varepsilon_\kappa \varepsilon_e + 16\pi^2 n_4^2 n_i^2 (\mu_\kappa^{-1} G_e^{\vartheta^2} + \mu_e^{-1} G_\kappa^{\vartheta^2}) -$$

$$- 16\pi^2 n_4^4 \varepsilon_i G_i^{\vartheta^2} - 32\pi^2 n_4^2 n_i n_\kappa \mu_e^{-1} G_i^{\vartheta} G_\kappa^{\vartheta} \Big] n_1 n_4$$

или, на основании формул (6, 24) и (6, 21)

$$\triangle_{14} = -\frac{24}{24} h^{\alpha\sigma\gamma\tau} n_\alpha n_\gamma n_\sigma n_\tau n_1 n_4 = \frac{1}{24} M \cdot n_1 n_4.$$

Для остальных алгебраических дополнений получаем по форме аналогичные результаты. В силу этого заключаем

$$\triangle_{rs} = \frac{1}{24} M \cdot n_r n_s .$$

---

[1] $\vec{G}^m$ принято равным нулю только в целях сокращения вычислений.

ЭР01663

ДВГНБ

ЭР01663

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ДАЛЬНЕВОСТОЧНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА,
ТОМ I, 1937

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Проф. В. И. Туранский. — Сравнение результатов измерений пластинок, накладной шкалой и блинк-микроскопом, на примере определения кривой яркости Эроса (в лабор. проф. Г. А. Тихова — Пулковская обсерватория) 3

Проф. В. И. Туранский. — Каталог звезд области ✳BD+51°3091 Cygni 15

Проф. С. П. Слугинов. — Уравнение Монжа-Ампера 59

Проф. С. П. Слугинов. — Уравнение Штурма-Лиувилля 87

Проф. С. П. Слугинов. — О дискриминанте кубического уравнения 121

Е. Н. Лыгин. — Применение интегральных уравнений в интегралах Стильтьеса к краевым задачам 123

Е. Н. Лыгин. — К интегралу Stieltjes'a по Radon'y и по Гюнтеру 137

А. П. Бекеев. — Построения Штейнера в геометрии треугольника 141

А. П. Бекеев. — О некоторых случаях гомологического расположения треугольников 151

Канд. физ. наук П. М. Кутейников. — Релятивистская электродинамика анизотропно-гиротропной среды 173

ЭР01663

ДОПОЛНЕНИЯ И ИСПРАВЛЕНИЯ

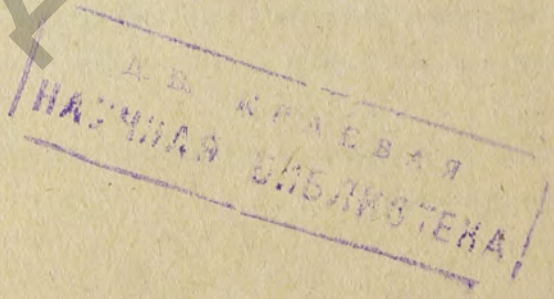
К СТАТЬЕ ПРОФ. В. И. ТУРАНСКОГО „КАТАЛОГ ЗВЕЗД ОБЛАСТИ ✳ *BD* +51° 3091 CYGNI".

В звездном каталоге фотовизуальные С. I. надлежит читать против указанных номеров звезд, вместо напечатанных, следующим образом:

№№ п/п.	Фотов из. С. I.	№№ п/п.	Фотовиз. С. I.	№№ п/п.	Фотовиз С. I.	№№ п/п.	Фотовиз. С. I.	№№ п/п.	Фотовиз. С. I.
36	1,76	463	1,76	980	0,46	1357	1,62	1726	0,98
37	0,78	531	1,08	1000	1,07	1389	0,46	1816	1,76
44	0,17	613	1,76	1035	0,18	1427	1,63	1861	0,59
86	1,95	618	1,76	1087	0,60	1434	0,14	1863	0,98
144	1,48	673	0,07	1101	1,25	1444	2,15	1917	1,53
196	2,19	805	1,68	1143	1,87	1475	0,76	1928	1,30
270	1,34	817	0,91	1165	0,18	1500	1,22	2019	1,04
280	0,30	824	0,74	1183	0,14	1526	0,40	2072	0,30
283	0,02	874	1,44	1215	1,07	1527	0,27	2085	1,38
284	0,30	877	0,75	1297	—0,08	1563	0,03	2105	—0,29
400	—0,52	936	—0,26	1320	0,56	1599	0,17	2134	0,46
450	0,63	953	0,46	1327	—0,02	1689	—0,29		

Проф. В. И. Туранский

ДВГНБ



Крайлит 635. Тираж 1200 экз. Заказ 470. 12,5 печ. листа. Автор. 16. Формат 72x110/16 51 584 зн. в 1 печ. листе. Сдано в пр-во 27/II-37 г., подписано к печати 16/VII-37 г. Отпечатано в типо-литографии им. Волина треста „Полиграфкнига". Владивосток, Ленинская, 43.

ЭР01663

ДВГНБ

ЭР01663

ДВГНБ

ЭР01663

ДВГНБ

ЭР01663

ДВГНБ

ЭР01663